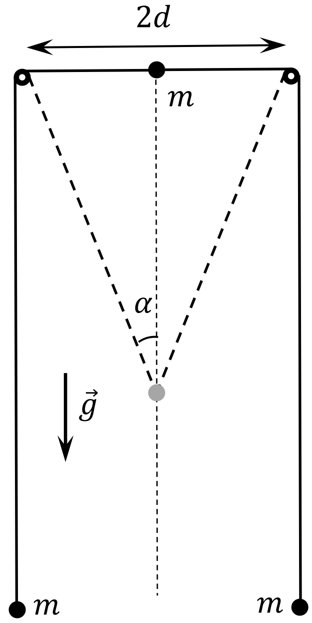
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ПРОЛЕТНО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
9 МАРТ 2024 г., КЪРДЖАЛИ
Решения на Специална тема (седма възрастова група)

Задача 1. От „П“ към „М“.



а) В равновесие $mg = 2mg\cos\alpha$, следователно $\cos\alpha = \frac{1}{2}$, $\alpha = 60°$. **[0.2 т.]**

б) Когато средното тяло пропадне максимално на дълбочина L, страничните тела ще се надигнат на височина s. От закона за запазване на енергията следва, че $0 = 2mgs - mgL$, откъдето $s = \frac{L}{2}$. (1) **[0.2 т.]** Тъй като $(d+s)^2 = d^2 + L^2$, $d^2 + 2ds + s^2 = d^2 + L^2$. **[0.1 т.]** Използвайки (1), $2d\frac{L}{2} + (\frac{L}{2})^2 = L^2$, откъдето $= \frac{4}{3}d$. **[0.2 т.]**

в) Нека бележим отместването на средното тяло от началното си положение с y, а на всяко от страничните тела – с s и приемем началната енергия за нула, то от закона за запазване на енергията $0 = -mgy + 2mgs + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{2m\dot{s}^2}{2}$. (2) **[0.3 т.]** Тъй като $(d+s)^2 = d^2 + y^2$, $s = \sqrt{d^2+y^2} - d$. (3) **[0.2 т.]** Връзка между скоростите на телата може да намерим като диференцираме (3): $\dot{s} = \frac{1}{2}\frac{2y\dot{y}}{\sqrt{d^2+y^2}} = \frac{y\dot{y}}{\sqrt{d^2+y^2}}$. (4) **[0.2 т.]** В положението на равновесие $\frac{d}{y} = \tan\alpha = \tan 60° = \sqrt{3}$, откъдето $y = \frac{d}{\sqrt{3}}$. **[0.2 т.]** (5) Замествайки (5) в (4) $\dot{s} = \frac{\dot{y}}{2}$. (6) **[0.2 т.]** Замествайки (3) и (6) в (2), $0 = -mgy + 2mg(\sqrt{d^2+y^2} - d) + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{2m\dot{y}^2}{8}$. (7) Разделяйки (7) на $2m$, получаваме $0 = -\frac{1}{2}gy + g(\sqrt{d^2+y^2} - d) + \frac{\dot{y}^2}{4} + \frac{\dot{y}^2}{8}$. (8) **[0.2 т.]** Замествайки y в (8) с израза (5), $0 = -g\frac{d}{2\sqrt{3}} + g(\sqrt{d^2 + (\frac{d}{\sqrt{3}})^2} - d) + \frac{\dot{y}^2}{4} + \frac{\dot{y}^2}{8}$. След опростяване на последното уравнение, $v_{\text{рав}} = \dot{y} = \sqrt{\frac{4}{3}gd(2-\sqrt{3})}$. **[0.3 т.]**

г) Използвайки (3) и (4), ур-ие (2) може да се трансформира така: $0 = -mgy + 2mgs + \frac{m\dot{y}^2}{2} + \frac{2m\dot{s}^2}{2}$, $0 = -2gy + 4g(\sqrt{d^2+y^2} - d) + \dot{y}^2 + 2\frac{y^2}{d^2+y^2}\dot{y}^2$. Оттук $\dot{y}^2 = 2g\frac{(d^2+y^2)}{d^2+3y^2}\left(y + 2d - 2\sqrt{d^2+y^2}\right)$. **[0.3 т.]** (9) Въвеждайки безразмерната променлива $x = \frac{y}{d}$, (9) се преобразува до $\dot{y}^2 = 2gd\frac{(1+x^2)}{1+3x^2}\left(x + 2 - 2\sqrt{1+x^2}\right)$. (10) Изследваме функцията $f(x) = \frac{(1+x^2)}{1+3x^2}\left(x + 2 - 2\sqrt{1+x^2}\right)$. Тя е дефинирана в интервала $x \in [0\ , 4/3]$, като в краищата на интервала се нулира. Търсим максимум в този интервал. Изчисляваме стойностите на функцията за сгъстяващи се стойности около очаквания максимум (виж таблицата **[0.6 т.]**). Получаваме за максимума $f(x) \approx 0.1929$ **[0.3 т.]** при $x \approx 0.415$. **[0.3 т.]** Следователно маскималната скорост се достига при $v_{max} \approx 0.621\sqrt{gd}$ **[0.3 т.]** в положение $H \approx 0.415d$. **[0.3 т.]**

x	$f(x)$
0.000	0
4/3	0
0.300	0.1819
0.600	0.174982
0.900	0.110434
0.200	0.148936
0.400	0.192759
0.500	0.188523
0.450	0.192122
0.430	0.192774
0.420	0.192908
0.410	0.192905
0.415	0.192924

д) В положението на равновесие $y = l$, $\frac{d}{l} = \tan 60°$, $l = \frac{d}{\sqrt{3}}$. Нека потенциалната енергия на системата в равновесното положение е нула. Тогава, ако средното тяло се отмести надолу на малко разстояние z, потенциалната енергия на системата в това положение е $E_{pot}(z) = -mgz + 2mg\left[\sqrt{d^2 + (l+z)^2} - \sqrt{d^2 + l^2}\right]$. **[0.5 т.]** $E_{pot}(z) = mg\left\{-z + 2\left[\sqrt{d^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{3}} + z\right)^2} - \sqrt{d^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]\right\} = mg\left\{-z + 2\frac{2d}{\sqrt{3}}\left[\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{z}{d} + \frac{3}{4}\left(\frac{z}{d}\right)^2} - 1\right]\right\}$. **[0.5 т.]**

Използвайки дадената приближена формула $\sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{3}{4}x^2} \approx 1 + \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{9}{32}x^2$, когато $|x| \ll 1$, $E_{pot}(z) \approx mg\left\{-z + 2\frac{2d}{\sqrt{3}}\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{4}\frac{z}{d} + \frac{9}{32}\left(\frac{z}{d}\right)^2 - 1\right]\right\} = mg\left\{\frac{4d}{\sqrt{3}}\left[\frac{9}{32}\left(\frac{z}{d}\right)^2\right]\right\} = \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{mg}{d}z^2$. **[0.5 т.]** Кинетичната енергия е $E_{kin}(\dot{z}) = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{2m\dot{s}^2}{2}$. Използвайки (6) $E_{kin}(\dot{z}) = \frac{m\dot{z}^2}{2} + \frac{2m(k\dot{z})^2}{2} = \frac{3}{4}m\dot{z}^2$. **[0.5 т.]** Пълната енергия на системата е $E = \frac{3\sqrt{3}}{8}\frac{mg}{d}z^2 + \frac{3}{4}m\dot{z}^2$. Това съответства на хармонично трептене с честота $\nu_v = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{3\sqrt{3}mg}{8\ \ d}}{\frac{3}{4}m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{g}{d}}$. **[0.5 т.]**

е) При хоризонтално отклонение y на средното тяло от равновесното му положение то не си променя височината, но от страничните две тела едното се надига, а другото се спуска. Потенциалната енергия на системата е

$$E_{pot}(y) = mg\left\{\left[\sqrt{(d+y)^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2} - \sqrt{d^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2}\right] + \left[\sqrt{(d-y)^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2} - \sqrt{d^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]\right\},$$

$$E_{pot}(y) = mg\left\{\left[\sqrt{\frac{4}{3}d^2 + 2dy + y^2} - \sqrt{\frac{4}{3}d^2}\right] + \left[\sqrt{\frac{4}{3}d^2 - 2dy + y^2} - \sqrt{\frac{4}{3}d^2}\right]\right\},$$

$$E_{pot}(y) = mg\frac{2d}{\sqrt{3}}\left\{\left[\sqrt{1 + \frac{3}{2}\frac{y}{d} + \frac{3}{4}\left(\frac{y}{d}\right)^2} - 1\right] + \left[\sqrt{1 - \frac{3}{2}\frac{y}{d} + \frac{3}{4}\left(\frac{y}{d}\right)^2} - 1\right]\right\}.$$ **[0.5 т.]**

Използвайки дадената приближена формула,

$$E_{pot}(y) = mg\frac{2d}{\sqrt{3}}\left\{\left[1 + \frac{3}{4}\frac{y}{d} + \frac{3}{32}\left(\frac{y}{d}\right)^2 - 1\right] + \left[1 - \frac{3}{4}\frac{y}{d} + \frac{3}{32}\left(\frac{y}{d}\right)^2 - 1\right]\right\}$$

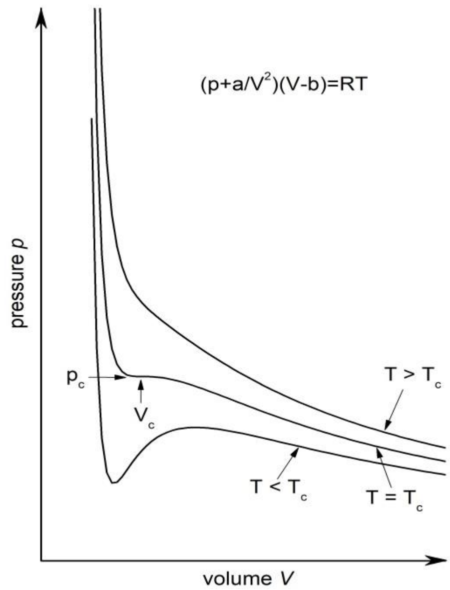
$$E_{pot}(y) = mg\frac{2d}{\sqrt{3}}\frac{6}{32}\left(\frac{y}{d}\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{8}\frac{mg}{d}y^2 .$$ **[0.5 т.]**

Тъй като отместването на едно от страничните тела (примерно лявото) е $x_л = \left[\sqrt{(d+y)^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2} - \sqrt{d^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2}\right]$, то диференцирайки, намираме неговата скорост $\dot{x}_л = \frac{1}{2}\frac{2(d+y)\dot{y}}{\sqrt{(d+y)^2 + \left(\frac{d}{\sqrt{3}}\right)^2}} \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{y}$. **[0.5 т.]** Аналогично за дясното тяло се получава същата скорост $\dot{x}_д \approx \frac{\sqrt{3}}{2}\dot{y}$. Общата кинетична енергия на системата е $E_{kin}(\dot{z}) = \frac{m}{2}\left[\dot{y}^2 + 2(\frac{\sqrt{3}}{2}\dot{y})^2\right] = \frac{5}{4}m\dot{y}^2$. **[0.5 т.]** Пълната енергия на системата е $E = \frac{\sqrt{3}}{8}\frac{mg}{d}y^2 + \frac{5}{4}m\dot{y}^2$. Това съответства на хармонично трептене с честота $\nu_h = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\frac{\sqrt{3}mg}{8\ \ d}}{\frac{5}{4}m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{3}}{10}\frac{g}{d}}$. **[0.5 т.]**

ж) Отношението на честотите е $\frac{\nu_v}{\nu_h} = \frac{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{2\,d}}}{\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{3}g}{10d}}} = \sqrt{5}$. **[0.2 т.]**

з) Тъй като отношението на честотите (и съответно на периодите) не е рационално число, то движението на тялото M, макар да е суперпозиция на две перпендикулярни периодични хармонични трептения, не е периодично. Траекторията ще бъде незатворена крива, безкрайно пъти самопресичаща се и вписваща се в правоъгълник със страни удвоените амплитуди на хоризонталното и вертикалното трептене. **[0.4 т.]**

<u>Задача 2.</u> Реален газ



а) Тъй като при едно и също налягане и температура n мола газ имат n пъти по-голям обем от един мол газ, то уравнението на Ван-дер-Ваалс за n мола газ ще изглежда така: $\left(p + \frac{n^2 a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT$. **[0.5 т.]**

б) Тъй като изотермата $p(V)$ в критичната точка (състоянието с параметри T_c, p_c и V_c) има нулева първа и втора производна, то $p = \frac{RT}{V-b} - \frac{a}{V^2}$, (1) $\frac{dp}{dV} = -\frac{RT}{(V-b)^2} + \frac{2a}{V^3} = 0$, **[0.2 т.]** $\frac{d^2p}{dV^2} = +\frac{2RT}{(V-b)^3} - \frac{6a}{V^4} = 0$, **[0.4 т.]** откъдето получаваме $\frac{RT}{(V-b)^2} = \frac{2a}{V^3}$ (2) и $\frac{RT}{(V-b)^3} = \frac{3a}{V^4}$. (3) Разделяйки (2) на (3), получваме $V - b = \frac{2V}{3}$, $V_c = 3b$. (4) **[0.8 т.]** Замествайки в (2), $T_c = \frac{8a}{27bR}$. **[0.8 т.]** (5) Замествайки (4) и (5) в (1), $p_c = \frac{a}{27b^2}$. **[0.8 т.]** (6)

в) За газ от азотни молекули (N_2) получаваме $V_c = 1{,}16.10^{-4}$ m^3, **[0.5 т.]** $T_c = 126$ K, **[0.5 т.]** $p_c = 33{,}9.10^5$ Pa = 33.9 atm. **[0.5 т.]**

г) 1. предполагайки, че е идеален газ $p = \frac{mRT}{\mu V} = 1{,}78.10^7$ Pa = 178 atm; **[0.5 т.]** 2. предполагайки, че е Ван-дер-Ваалсов газ $p = \frac{RT}{\frac{\mu}{m}V - b} - \frac{a}{\left(\frac{\mu}{m}V\right)^2} = 1{,}76.10^7$ Pa = 176 atm. **[1 т.]**

д) Въвеждайки безразмерните променливи уравнението на Ван-дер-Ваалс добива вида $\left(\pi p_c + \frac{a}{(\varphi V_c)^2}\right)(\varphi V_c - b) = R\tau T_c$. **[0.3 т.]** Замествайки с изразите, получени в (4), (5) и (6), получаваме $\left(\pi \frac{a}{27b^2} + \frac{a}{(\varphi 3b)^2}\right)(\varphi 3b - b) = R\tau \frac{8a}{27bR}$. **[0.5 т.]** След опростяване $\left(\pi + \frac{3}{\varphi^2}\right)(3\varphi - 1) = 8\tau$. (7) **[0.7 т.]**

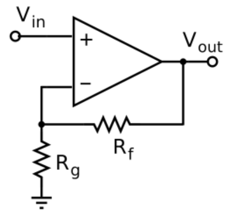
е) 1. Предполагайки, че е идеален газ, $pV = \frac{mRT}{\mu}$, $p = \frac{\rho RT}{\mu}$, откъдето $\rho = \frac{p\mu}{RT}$, $\rho = 1{,}123$ kg/m^3. **[0.4 т.]** 2. Предполагайки, че е Ван-дер-Ваалсов газ, една възможност е да използваме уравнението на Ван-дер-Ваалс в безразмерни променливи. Изчисляваме първо безразмерните параметри: $\pi = \frac{p}{p_c} = 2{,}950.10^{-2}$, **[0.2 т.]** $\tau = \frac{T}{T_c} = 2{,}381$. **[0.2 т.]** Уравнение (7) се преобразува до кубичното уравнение $3\pi\varphi^3 - (\pi + 8\tau)\varphi^2 + 9\varphi - 3 = 0$. Замествайки с числените стойности, получаваме $0.0885\varphi^3 - 19.08\varphi^2 + 9\varphi - 3 = 0$. **[0.2 т.]** (8) Тъй като $\tau > 1$, трябва да има само един реален корен. Очакваме резултатът да е близък до този, изчислен с уравнението на идеалния газ. Изчисляваме безразмерния обем, получен с уравнението на идеалния газ,

φ	$f(\varphi)$
210	-19942.5
220	20853
215	-494.812
215.5	1553.368
215.2	322.1758
215.1	-86.6986
215.12	-4.98461

$\varphi = \frac{V}{V_c} = \frac{\mu}{\rho V_c} = 215.0$. Търсим решение на (8) близо до тази стойност (виж таблицата **[0.4 т.]**) Решението е $\varphi \approx 215.1$. **[0.2 т.]** Следователно $\rho = \frac{\mu}{\varphi V_c} = 1{,}123$ kg/m^3. **[0.4 т.]**

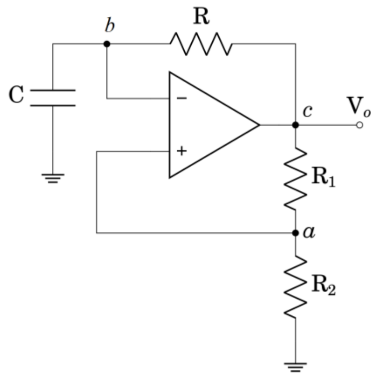
<u>Задача 3.</u> Мултивибратор.

а) Нека напрежението зависи от времето така: $U(t) = A + Be^{\alpha t}$. Тогава зарядът на плочите ще зависи от времето така: $q(t) = CU(t) = CA + CBe^{\alpha t}$, а токът във веригата – така: $I(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C\frac{dU(t)}{dt} = CB\alpha e^{\alpha t}$. **[0.2 т.]** От закона на Ом за цялата верига $E = RI(t) + U(t) = RCB\alpha e^{\alpha t} + A + Be^{\alpha t} = A + B(RC\alpha + 1)e^{\alpha t}$. **[0.4 т.]** За да е изпълнен във всеки един момент от време, $RC\alpha + 1 = 0$, откъдето $\alpha = -\frac{1}{RC}$. **[0.1 т.]** След достатъчно дълго време ($t \to \infty$), $E = A$. **[0.1 т.]** В началния момент време $-U_0 = E + B$, следователно $B = -U_0 - E$ **[0.1 т.]**. Така $U(t) = E - (U_0 + E)e^{-\frac{t}{RC}}$. **[0.4 т.]** Напрежението се нулира, когато $E = (U_0 + E)e^{-\frac{t_0}{RC}}$, откъдето $t_0 = -RC\ln\frac{E}{E+U_0} = RC\ln(1 + \frac{U_0}{E})$. **[0.2 т.]**

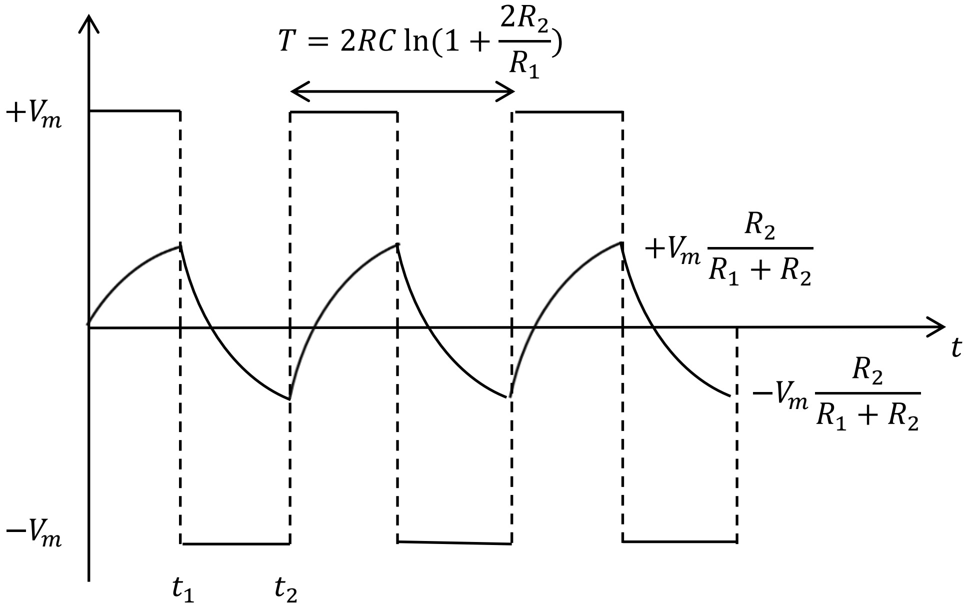


б) Тъй като $V_{out} < |V_{max}|$, то $V_+ \approx V_-$. **[0.2 т.]** Също така след като входовете на схемата не консумират ток, то токът I през двата резистора е един и същ. **[0.2 т.]** Тогава $V_{in} = I.R_g$, **[0.2 т.]** а $V_{out} = I.(R_g + R_f)$. **[0.2 т.]** Разделяйки двете уравнения $V_{out} = V_{in}.\frac{R_g+R_f}{R_g}$ и $A = 1 + \frac{R_f}{R_g}$. **[0.7 т.]**

в) В началния момент време след като V_o стане положително, а V_b е все още нула (кондензаторът не е зареден), то $V_o = V_m$. Тогава $V_a = V_m\frac{R_2}{R_1+R_2}$, **[0.5 т.]** а кондензаторът ще започне да се зарежда от напрежението V_m през резистора R. Използвайки резултата



от а), $V_b(t) = V_m(1 - e^{-\frac{t}{RC}})$. **[0.5 т.]** В момент t_1 $V_a = V_b$, $V_m\frac{R_2}{R_1+R_2} = V_m(1 - e^{-\frac{t_1}{RC}})$, откъдето $t_1 = RC\ln(1 + \frac{R_2}{R_1})$. **[0.5 т.]** В следващия момент време $V_b > V_a$ и напрежението V_o веднага ще стане $V_o = -V_m$. Тогава кондензаторът ще започне да се презарежда от начално напрежение $V_m\frac{R_2}{R_1+R_2}$ заради напрежението $-V_m$. Използвайки отново резултата от а), $V_b(t) = -V_m - (-V_m\frac{R_2}{R_1+R_2} - V_m)e^{-\frac{t-t_1}{RC}}$. **[0.5 т.]** Когато в момента t_2 обаче $V_b(t) = V_a = -V_m\frac{R_2}{R_1+R_2}$, **[0.5 т.]** ОУ отново ще се превключи и на изхода напрежението V_o веднага ще стане $V_o = V_m$. И така нататък. Моментът t_2 ще се определи от равенството $-V_m - \left(-V_m\frac{R_2}{R_1+R_2} - V_m\right)e^{-\frac{t_2-t_1}{RC}} = -V_m\frac{R_2}{R_1+R_2}$, откъдето $t_2 - t_1 = RC\ln(1 + \frac{2R_2}{R_1})$. Тогава периодът на променливото напрежение ще бъде $T = 2(t_2 - t_1) = 2RC\ln(1 + \frac{2R_2}{R_1})$. Напрежението на изхода V_o ще бъде правоъгълни импулси с големина $\pm V_m$ и период $T = 2RC\ln(1 + \frac{2R_2}{R_1})$. **[1 т.]** Кондензаторът ще се презарежда между напрежения $\pm V_m\frac{R_2}{R_1+R_2}$ със същия период **[1 т.]** (виж фигурата **[2.5 т.]**).


$T = 2RC\ln(1+\frac{2R_2}{R_1})$
$+V_m$
$+V_m\frac{R_2}{R_1+R_2}$
t
$-V_m\frac{R_2}{R_1+R_2}$
$-V_m$
t_1
t_2