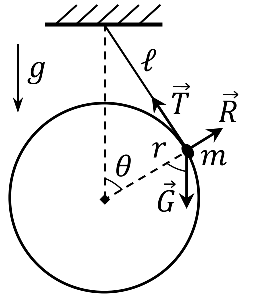
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
4 – 6 март 2023 г., Варна
Решения на темата за V състезателна група (11. клас)

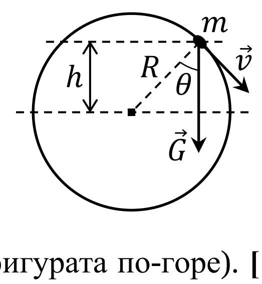
Задача 1. Тяло върху кълбо (задачата се състои от две независими части)



Част I а) На тялото действат три сили: силата на тежестта $\vec{G} = m\vec{g}$ вертикално надолу, силата на опън $\vec{T}$ по протежение на нишката (допирателно на кълбото) и реакцията на опората $\vec{R}$ (вж. фигурата вляво). Удобно е да разложим силата на тежестта в тангенциално и нормално направление на повърхността на кълбото. От условието за равновесие на тялото следва, че $T = mg\sin\theta = \frac{mg\ell}{\sqrt{r^2+\ell^2}} = 0{,}4$ N **[1 т.]**, а големината на силата на натиск е равна на големината на реакцията на опората: $N = R = mg\cos\theta = \frac{mgr}{\sqrt{r^2+\ell^2}} = 0{,}3$ N **[1 т.]**.

б) При въртене на тялото силата на тежестта не се променя, силата на опън нараства, а реакцията на опората намалява така, че векторната сума на трите сили е насочена към вертикалната ос на въртене и има големина $m\omega^2 r\sin\theta$ (центростремителна сила). **[0,5 т.]** Като разложим новата сила на опън T' и реакция на опората R' в хоризонтално и вертикално направление, ще получим, че $T'\cos\theta - R'\sin\theta = m\omega^2 r\sin\theta$ **[0,5 т.]**, а $T'\sin\theta + R'\cos\theta = mg$ **[0,5 т.]**. В условието на задачата е дадено, че $T' = 2R'$, откъдето $\omega = \sqrt{\frac{g(2\cos\theta - \sin\theta)}{r\sin\theta(\cos\theta + 2\sin\theta)}} = \sqrt{\frac{g(2r-\ell)\sqrt{r^2+\ell^2}}{r\ell(r+2\ell)}} \approx 2{,}8$ rad/s. **[1,5 т.]**

в) Докато тялото е върху кълбото, има ненулева сила на натиск, т.е. при въртене с ъглова скорост $\omega_{\max}$ вече няма да има реакция на опората. В този случай е удобно да разложим силата на опън, която ще означим с T'', в хоризонтално и вертикално направление. Получават се следните две уравнения: $T''\cos\theta = m\omega_{\max}^2 r\sin\theta$ и $T''\sin\theta = mg$. **[0,5 т.]** Оттук $\omega_{\max} = \sqrt{\frac{g\cos\theta}{r\sin^2\theta}} = \frac{\sqrt{g\sqrt{r^2+\ell^2}}}{\ell} \approx 5{,}6$ rad/s. **[1 т.]**



Част II Нека да означим масата на тялото с m. Тялото се е спуснало с $R - h$ надолу до момента на изплъзване от повърхността на кълбото. От закона за запазване на енергията следва, че $\frac{mv^2}{2} = mg(R-h)$, т.е. $v = \sqrt{2g(R-h)}$. **[0,5 т.]** От друга страна, тогава силата на натиск става равна на нула и центростремителната сила е равна на радиалната компонента на силата на тежестта: $\frac{mv^2}{R} = mg\cos\theta = \frac{mgh}{R}$ (вж. фигурата по-горе). **[1 т.]** Оттук следва, че $v = \sqrt{gh}$, $2(R-h) = h$, т.е. $h = \frac{2R}{3} = 40$ cm. **[1 т.]** Скоростта $v = \sqrt{\frac{2gR}{3}} = 2$ m/s. **[1 т.]**

Задача 2. Хармонични трептения (задачата се състои от две независими части)
Част I Трупче на пружина

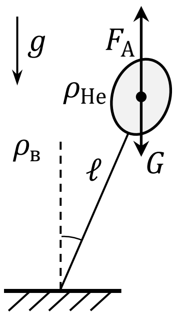
а) В състояние на равновесие на трупчето действа сила на тежестта mg надолу, Архимедова сила $\rho Sgh/2$ нагоре и еластична сила $k\Delta\ell_0$ (в случая нагоре), като $k\Delta\ell_0 + \frac{\rho Sgh}{2} = mg$. **[1 т.]** Оттук разтежението на пружината е $\Delta\ell_0 = \frac{(2m - \rho Sh)g}{2k} = 1{,}7$ cm. **[1 т.]**

б) Нека трупчето е отклонено на малко разстояние x надолу от равновесното му положение. Тогава разтежението на пружината ще бъде $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$ и еластичната сила ще има нова големина $k(\Delta\ell_0 + x)$. Поради голямата напречна площ на ваната, нивото на водата няма да се промени съществено и Архимедовата сила ще стане $\rho S g\left(\frac{h}{2} + x\right)$. Сумарната сила върху трупчето ще действа нагоре с големина $k(\Delta\ell_0 + x) + \rho S g\left(\frac{h}{2} + x\right) - mg = (k + \rho S g)x$, т.е. е квазиеластична с ефективен коефициент на еластичност $k + \rho S g$. **[1 т.]** Следователно периодът на хармоничните трептения на трупчето е $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k+\rho S g}} \approx 0{,}29$ s. **[1 т.]**

в) Амплитудата $A = \frac{h}{6}$ на трептенията се определя от максималното отклонение на трупчето спрямо равновесното му положение, когато то е $2/3$ потопено във водата. От закона за запазване на енергията следва, че $\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{(k+\rho S g)A^2}{2}$ и $v_{\max} = \frac{h}{6}\sqrt{\frac{k+\rho S g}{m}} \approx 0{,}29\ \mathrm{m/s}$. **[1,5 т.]**

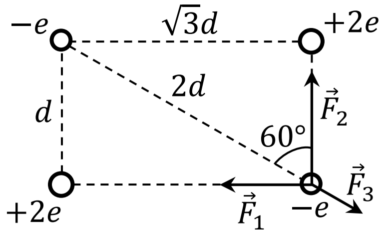
г) Силата е минимална, когато пружината е най-малко разтегната, което съответства на най-високото положение на трупчето. Тогава разтежението на пружината е $\Delta\ell_{\min} = \Delta\ell_0 - A$ и $F_{\min} = k\Delta\ell_{\min} = k(\Delta\ell_0 - A) \approx 0{,}73$ N. **[1 т.]** Максималната сила е при максимално разтягане и най-ниско положение на трупчето, когато разтежението е $\Delta\ell_{\max} = \Delta\ell_0 + A$ и $F_{\max} = k\Delta\ell_{\max} = k(\Delta\ell_0 + A) \approx 6{,}1$ N. **[1 т.]**

Част II Люлеещ се балон



На балона, чийто обем ще означим с V, действат три сили: силата на тежестта $G = \rho_{He} V g$ надолу, Архимедовата сила $F_A = \rho_в V g$ вертикално нагоре и силата на опън, насочена по протежение на нишката към точката на окачване. Системата е аналогична на математично махало, но вместо само силата на тежестта да действа надолу, тук действа сила $F_A - G = (\rho_в - \rho_{He})Vg$ нагоре. **[1 т.]** Като използваме, че масата на балона с хелия в него е $\rho_{He}V$, може да представим силата $F_A - G = \rho_{He}V\frac{(\rho_в - \rho_{He})g}{\rho_{He}}$, т.е. $\frac{(\rho_в - \rho_{He})g}{\rho_{He}}$ играе ролята на ефективно „небесно“ ускорение. **[0,5 т.]** Оттук следва, че периодът на малките трептения е $T = 2\pi\sqrt{\frac{\rho_{He}}{\rho_в - \rho_{He}}\frac{\ell}{g}} \approx 1{,}2$ s. **[1 т.]**

Задача 3. Електростатика



а) Силата, която действа на долния десен заряд, е векторна сума от силите, с които му действат останалите три заряда. Силите са означени на фигурата вляво. Големините им са: $F_1 = \frac{2ke^2}{3d^2}$, $F_2 = \frac{2ke^2}{d^2}$ и $F_3 = \frac{ke^2}{4d^2}$. **[1,5 т.]** За да намерим резултантната сила, нека да разложим $\vec{F}_3$ по направления, успоредни на страните на правоъгълника. Големината на проекцията на силата $\vec{F}_3$ по дължината на правоъгълника е $F_{31} = \frac{ke^2}{4d^2}\cos 30° = \frac{\sqrt{3}ke^2}{8d^2}$, а големината на проекцията на $\vec{F}_3$ по ширината на правоъгълника е $F_{32} = \frac{ke^2}{4d^2}\cos 60° = \frac{ke^2}{8d^2}$. **[1 т.]** Големината на резултантната сила може да се получи от Питагоровата теорема: $F = \sqrt{(F_1 - F_{31})^2 + (F_2 - F_{32})^2} = \frac{\sqrt{577 - 24\sqrt{3}}}{12}\frac{ke^2}{d^2} \approx 1{,}1 \times 10^{-24}$ N. **[2 т.]**

б) Потенциалът в центъра на правоъгълника е алгебрична сума от потенциалите на четирите заряда в тази точка: $\varphi = \frac{2ke}{d} \approx 1{,}4 \times 10^{-7}$ V. **[1,5 т.]**

в) Търсената работа A може да се намери по няколко алтернативни начина. За да разменим местата на горните два заряда, нека първо да отдалечим горния ляв заряд на много голямо разстояние от останалите заряди. Съответната извършена работа ще бъде $A_1 = e\left(\frac{2ke}{\sqrt{3}d} + \frac{2ke}{d} - \frac{ke}{2d}\right) = \frac{2ke^2}{\sqrt{3}d} + \frac{3ke^2}{2d}$ (използваме, че потенциалът на много голямо разстояние от зарядите е нула). **[1 т.]** След това нека да преместим горния десен заряд в горния ляв връх на правоъгълника, при което се извършва работа $A_2 = 2e\left(\frac{2ke}{d} - \frac{ke}{2d} - \frac{ke}{d} + \frac{ke}{d}\right) = \frac{3ke^2}{d}$. **[1 т.]** Накрая нека да върнем отдалечения заряд в горния десен връх на правоъгълника – нужната работа A_3 е отрицателна: $A_3 = -e\left(\frac{2ke}{\sqrt{3}d} + \frac{ke}{d} - \frac{ke}{d}\right) = -\frac{2ke^2}{\sqrt{3}d}$. **[1 т.]** Окончателно, $A = A_1 + A_2 + A_3 = \frac{9ke^2}{2d} \approx 5{,}2 \times 10^{-26}$ J. **[1 т.]**