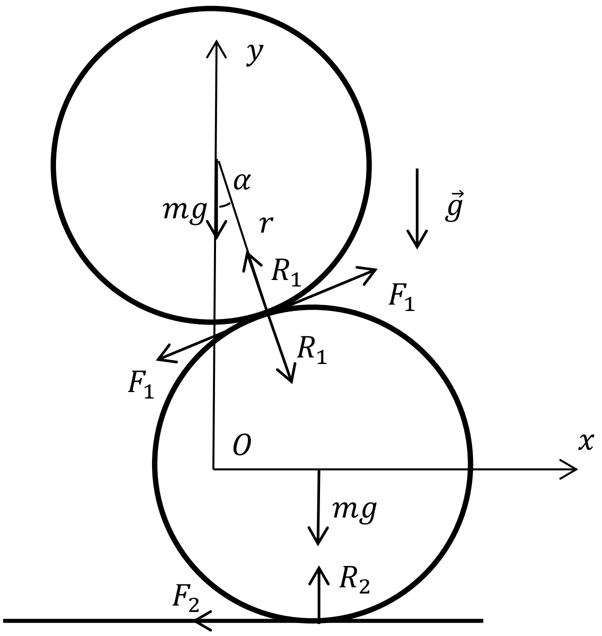
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
4 – 6 март 2022 г., Върщец
Решения на задачите от Специалната тема

Задача 1. Пирамида от топки.

а) Нека първо да изчислим ъгъла α между вертикалата и правата, минаваща през центровете на горната и една от долните топки. Тъй като вертикалата минава през средата O на равностранния триъгълник, образуван от центровете на трите долни пирамиди, то триъгълникът, образуван от точка O, центъра на горната топка и центъра на една от долните топки е правоъгълен с хипотенуза с дължина $2r$ и хоризонтална страна с дължина $\frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}}{2}.2r = \frac{2}{\sqrt{3}}r$. Следователно $\sin\alpha = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}r}{2r} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $\alpha \approx 35,3°$. **[0,5 т.]** Нека изберем правоъгълна координатна система с център точка O, хоризонтална ос x и вертикална ос y (виж чертежа). На чертежа е нарисувана само едната от долните 3 топки. За горната топка условието за равновесие по оста y е: $-mg + 3R_1\cos\alpha + 3F_1\sin\alpha = 0$, **[0,3 т.]** (1) където R_1 е реакцията на опората, а F_1 – силата на триене при покой, действаща на горната топка от всяка една от долните топки. Условието за равновесие по оста x е: $F_1\cos\alpha - R_1\sin\alpha - 2.\frac{1}{2}F_1\cos\alpha + 2.\frac{1}{2}R_1\sin\alpha = 0$. Последните 4 сили са тези, които действат на горната топка от двете ненарисувани на чертежа долни топки. Това условие всъщност е тъждество (следва от симетрията на задачата).



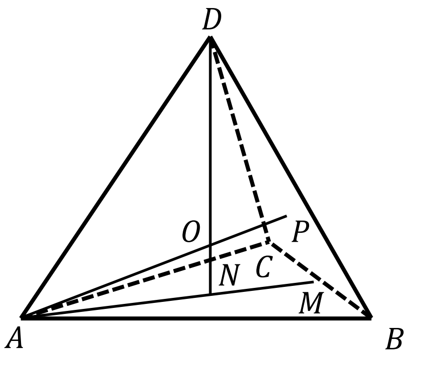
За долната топка условието за равновесие по оста y е: $-mg - R_1\cos\alpha - F_1\sin\alpha + R_2 = 0$, **[0,4 т.]** (2) а по оста x: $R_1\sin\alpha - F_1\cos\alpha - F_2 = 0$. **[0,3 т.]** (3) Условието за равновесие за долната топка включва и условието за липса на въртене (т.е. сумата от въртящите моменти, действащи на долната топка, да е нула): $F_1.r - F_2.r = 0$, откъдето $F_1 = F_2 = F$. (4) Уравнения (1), (2), (3) и (4) образуват система от 4 уравнения с 4 неизвестни: F_1, F_2, R_1 и R_2. Замествайки (4) в (1), (2) и (3), получаваме $-mg + 3R_1\cos\alpha + 3F\sin\alpha = 0$ (5), $-mg - R_1\cos\alpha - F\sin\alpha + R_2 = 0$ (6) и $R_1\sin\alpha - F\cos\alpha - F = 0$ (7). Изразявайки F от (7), $F = \frac{R_1\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$ **[0,5 т.]** и замествайки го в (5), се получава $mg = 3R_1\cos\alpha + 3F\sin\alpha$, $mg = 3R_1\cos\alpha + 3\frac{R_1\sin\alpha}{1+\cos\alpha}\sin\alpha$, $mg = 3R_1$, откъдето $R_1 = \frac{mg}{3}$. **[0,5 т.]** Замествайки получените изрази за F и R_1 в (6), получаваме $R_2 = \frac{4mg}{3}$. **[0,5 т.]** Тъй като F_1 и F_2 са сили на триене при покой, то $F_1 \leq k_1R_1$ и $F_2 \leq k_2R_2$. Замествайки с получените изрази за тези 4 сили и стойността на $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$, се получава $k_1 \geq \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \approx 0{,}318$ **[1,0 т.]** ; $k_2 \geq \frac{1}{4(\sqrt{2}+\sqrt{3})} \approx 0{,}0795$. **[1,0 т.]**

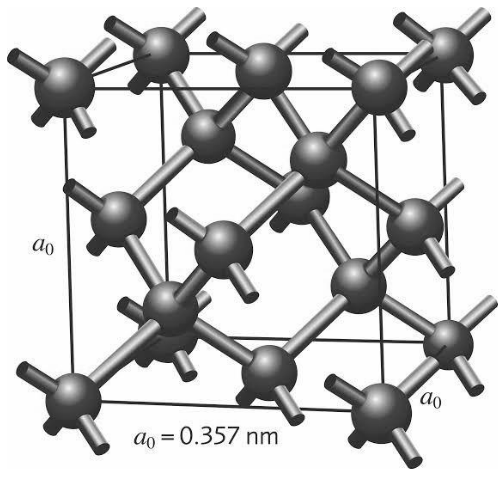
б) От съображения за симетрия горната топка ще пада вертикално, а долните три ще се движат хоризонтално с равни скорости в посоки, сключващи ъгли 120°. Докато горната топка се допира с тях, тя ще ги ускорява. Докато те се допират обаче, тяхното движение не е независимо, тъй като центровете на горната топка и на всяка от долните топки остават на разстояние $2r$. **[0,5 т.]** Нека височината на центъра на горната топка от т. O (виж чертежа) е y, а разстоянието до центъра на всяка от долните топки от т. O е x. Тогава, докато те се допират, $x^2 + y^2 = (2r)^2$ (1). Ако диференцираме (1), се получава $2xv_x + 2yv_y = 0$ (2), **[0,5 т.]** където v_x и v_y са съответно скоростите на долните и горната топки. Ако диференцираме (2), се получава ${v_x}^2 + xa_x + {v_y}^2 + ya_y = 0$. **[0,5 т.]** (3), където a_x и a_y са съответно ускоренията на долните и горната топки. Топките ще се допират дотогава, докато $a_x = 0$, а $a_y = -g$. **[0,5 т.]** От този момент нататък скоростите на долните топки повече няма да се променят и те ще достигнат максималната си скорост v_∞. Нека тогава $v_y = v_{y\text{кр}}$. Замествайки в (3), получаваме ${v_\infty}^2 + {v_{y\text{кр}}}^2 - y_{\text{кр}}.g = 0$. **[0,5 т.]** (4) В този момент $2x_{\text{кр}}v_\infty + 2y_{\text{кр}}v_{y\text{кр}} = 0$. (5) Тъй като няма триене, е изпълнен законът запазване на механичната енергия. Ако приравним енергията в началното положение (покой и центровете на четирите топки образуват тетраедър) и положението на отлепване на долните топки от горната, то $mg2r\cos\alpha = mg2r\cos\varphi + \frac{m{v_{y\text{кр}}}^2}{2} + \frac{3m{v_\infty}^2}{2}$ **[0,5 т.]** (6), където $\cos\varphi = \frac{y_{\text{кр}}}{2r}$. Нека изразим $v_{y\text{кр}}$ от (5), $v_{y\text{кр}} = -\frac{x_{\text{кр}}}{y_{\text{кр}}}v_\infty$, $v_{y\text{кр}} = -\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}v_\infty$ (7). Замествайки (7) в (4), ${v_\infty}^2 + \left(\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\right)^2 {v_\infty}^2 = g.2r\cos\varphi$, откъдето ${v_\infty}^2 = 2gr(\cos\varphi)^3$ **[0,5 т.]** (8). Замествайки (8) в (7) ${v_{y\text{кр}}}^2 = 2gr(\sin\varphi)^2\cos\varphi$ **[0,5 т.]** (9). Замествайки (8) и (9) в (6), се получава $mg2r\cos\alpha = mg2r\cos\varphi + \frac{m2gr(\sin\varphi)^2\cos\varphi}{2} + \frac{3m2gr(\cos\varphi)^3}{2}$, откъдето след опростяване се получава уравнението $(\cos\varphi)^3 + \frac{3}{2}\cos\varphi - \sqrt{\frac{2}{3}} = 0$. **[0,5 т.]** Това уравнение има единствено решение $\cos\varphi \approx 0{,}47354$. Следователно $v_\infty = \sqrt{2gr(0{,}47354)^3} \approx 0{,}461\sqrt{gr}$. **[0,5 т.]**

<u>Задача 2.</u> Диамант.

а) Тъй като $E_\text{о} - E_\text{р} = h\nu$, то $\frac{hc}{\lambda_\text{о}} - \frac{hc}{\lambda_\text{р}} = h\nu$, то $\nu = c\left(\frac{1}{\lambda_\text{о}} - \frac{1}{\lambda_\text{р}}\right)$ **[0,5 т.]** = 3,00.10^8 m/s.1333 1/cm = 4,00.10^{13} Hz. **[0,5 т.]**

б) Ъгълът φ между две химични връзки на един въглероден атом в диаманта е всъщност ъгълът между две височини в един тетрадър.

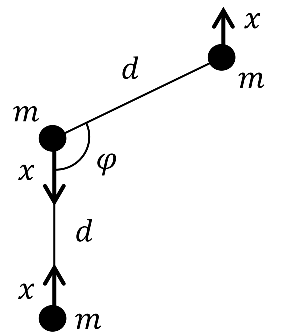




Нека разгледаме тетраедъра $ABCD$ с ръб b. Височината AM на основата му има дължина $\frac{\sqrt{3}}{2}b$.

Точка N е пресечна точка на височините на основата, така че $AN = \frac{2}{3}AM = \frac{1}{\sqrt{3}}b$. **[0,3 т.]** Триъгълникът AND е правоъгълен, следователно $ND^2 = AD^2 - AN^2$, откъдето $ND =$

$\sqrt{\frac{2}{3}}b$. **[0,2 т.]** Пресечната точка на височините AP и ND е точка O. Тя дели височината ND в отношение 3:1. Следователно $DO = \frac{3}{4}ND = \sqrt{\frac{3}{8}}b$. **[0,2 т.]** Триъгълникът AOD е равнобедрен. Следователно от косинусовата теорема $AD^2 = AO^2 + OD^2 - 2AO.OD\cos\varphi$, откъдето $b^2 = \frac{3}{8}b^2 + \frac{3}{8}b^2 - 2\frac{3}{8}b^2\cos\varphi = \frac{3}{4}b^2(1-\cos\varphi)$, откъдето $\cos\varphi = -\frac{1}{3}$, $\varphi \approx 109.5°$. **[0,3 т.]**



в) На чертежа са нарисувани само два от съседните атоми на един въглероден атом (другите два са разположени като горния, но не лежат в равнината на чертежа). При отклонение x на централния атом действа резултантна сила F, сума на 4-те сили, с които му действат 4-те съседни атоми. Следователно $-F = 2kx + 3.\cos(\pi-\varphi).k.2x.\cos(\pi-\varphi) = 2kx + 6kx(\cos\varphi)^2 =$ **[1 т.]** $= 2kx[1+3(\cos\varphi)^2] = \frac{8}{3}kx = -m\ddot{x}$. Следователно $\omega = \sqrt{\frac{8k}{3m}}$, $= \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{8k}{3m}}$, откъдето $k = \frac{3}{8}m(2\pi\nu)^2$ **[1 т.]** $k \approx 472$ N/m. **[1 т.]**

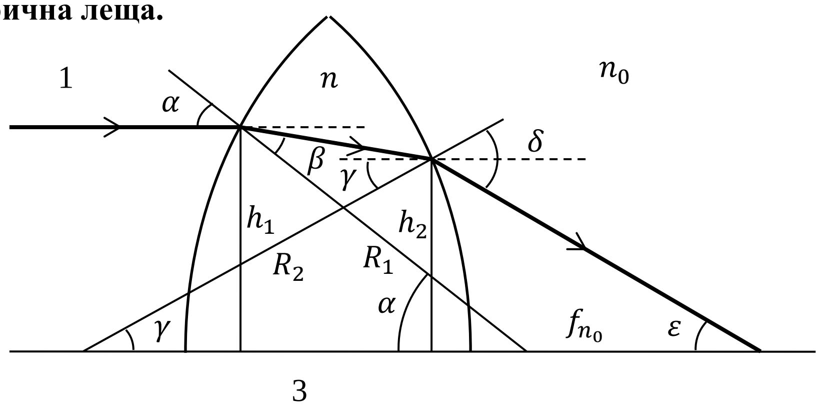
г) Плътността ρ на диаманта е равна на плътността на неговата елементарна клетка. $\rho = \frac{Nm}{V} = \frac{Nm}{{a_0}^3}$. **[0,2 т.]** Броят атоми $N = 4 + 6.\frac{1}{2} + 8.\frac{1}{8} = 8$ (има 4 атоми вътре в клетката, 6 в центровете на 6-те стени, но общи за 2 клетки, и 8 по върховете на куба, но общи за 8 клетки). **[0,3 т.]** Следователно $\rho = \frac{8m}{{a_0}^3} \approx 3515$ kg/m^3. **[0,5 т.]**

д) Нека рагледаме само една елементарна клетка. Нека под действие на външно налягане p намалим ръба на куба с Δa. Тогава обемът на клетката ще се промени с $\Delta V = {a_0}^3 - (a_0 - \Delta a)^3 \approx 3{a_0}^2\Delta a$. **[0,5 т.]** При това свиване външните сили ще изършват работа $A = \frac{p\Delta V}{2}$. **[0,5 т.]** Тъй като $p = B\frac{\Delta V}{V_0}$, то $A = \frac{B\Delta V^2}{2V_0} = \frac{B\left(3{a_0}^2\Delta a\right)^2}{2{a_0}^3} = \frac{9}{2}Ba_0(\Delta a)^2$. **[0,5 т.]** (1) Тази работа ще е равна на потенциалната енергия на деформираните пружинки, намиращи се в елементарната клетка $E_{\text{пот}} = N_1\frac{1}{2}k(\Delta x)^2$. $N_1 = 16$, а $\Delta x = \frac{1}{4}\sqrt{3}\Delta a$. Така $E_{\text{пот}} = 16\frac{1}{2}k\frac{3}{16}(\Delta a)^2 = \frac{3}{2}k(\Delta a)^2$. **[0,5 т.]** (2) Приравнявайки (1) и (2) $\frac{9}{2}Ba_0(\Delta a)^2 = \frac{3}{2}k(\Delta a)^2$, $B = \frac{k}{3a_0}$ **[0,5 т.]** ≈ 441 GPa. **[0,5 т.]**

е) От дадената формула следва, че $N = \frac{C_{11}+2C_{12}}{B}$. Използвайки получената стойност за B и дадените за C_{11} и C_{12}, $N = 3$. **[0.5 т.]**

ж) Скоростта на звука в посока, успоредна на един от векторите на транслация, е $v_L^{[100]} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \approx 17520$ m/s. **[0.5 т.]**

<u>Задача 3.</u> Тънка сферична леща.



Нека разгледаме ситуацията, в която се измерва фокусното разстояние f_{n_0} (виж фигурата). От чертежа се вижда, че $\frac{h_1}{R_1} = \sin\alpha \approx \alpha$ (1), $\frac{h_2}{R_2} = \sin\gamma \approx \gamma$ (2). От пречупването на лъча при влизане в лещата $\frac{n}{1} = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \approx \frac{\alpha}{\beta}$ (3). От пречупването на лъча при излизане от лещата $\frac{n_o}{n} = \frac{\sin(\gamma+\alpha-\beta)}{\sin\delta} \approx \frac{\gamma+\alpha-\beta}{\delta}$ (4). Тъй като лещата е тънка, $h_1 \approx h_2$ (5) и $h_2 \approx f_{n_0}\tan\varepsilon \approx f_{n_0}\varepsilon$ (6). Вижда се, че $\delta = \gamma + \varepsilon$ (7). От (6) следва $\frac{h_2}{f_{n_0}} = \varepsilon$. Използвайки (7) и (4), $\frac{h_2}{f_{n_0}} = \varepsilon = \delta - \gamma = \frac{n}{n_o}(\gamma + \alpha - \beta) - \gamma$. Използвайки (1), (2) и (3), получаваме $\frac{h_2}{f_{n_0}} = \frac{n}{n_o}(\frac{h_2}{R_2} + \frac{h_1}{R_1} - \frac{h_1}{nR_1}) - \frac{h_2}{R_2}$. Използвайки (5), след съкращения и преобразуване $\frac{n_o}{f_{n_0}} = \frac{n-n_o}{R_2} + \frac{n-1}{R_1}$ (8). **[3 т.]** За ситуацията, в която се измерва фокусното разстояние f_1, достатъчно е във формула (8) да разменим местата на R_1 и R_2 и на n_o и 1. Тогава $\frac{1}{f_1} = \frac{n-1}{R_1} + \frac{n-n_o}{R_2}$ (9). Сравнявайки (8) и (9), $n_o = \frac{f_{n_0}}{f_1}$ **[0.5 т.]** ≈1,40. **[0.5 т.]** За ситуацията, в която се измерва фокусното разстояние f_2, достатъчно е във формула (9) да разменим местата на R_1 и R_2. Тогава $\frac{1}{f_2} = \frac{n-1}{R_2} + \frac{n-n_o}{R_1}$ (10). А за ситуацията, в която се измерва фокусното разстояние f, достатъчно е във формула (10) да положим $n_o = 1$. Тогава $\frac{1}{f} = \frac{n-1}{R_2} + \frac{n-1}{R_1}$ (11). Ако от (11) извадим (9), се получава $\frac{1}{f} - \frac{1}{f_1} = \frac{n-1}{R_2} - \frac{n-n_o}{R_2} = \frac{n_o-1}{R_2}$, откъдето $R_2 = \frac{n_o-1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}$ (12) **[1.5 т.]** ≈ 0,502 m. **[0.5 т.]** Ако от (11) извадим (10) се получава $\frac{1}{f} - \frac{1}{f_2} = \frac{n-1}{R_1} - \frac{n-n_o}{R_1} = \frac{n_o-1}{R_1}$, откъдето $R_1 = \frac{n_o-1}{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_2}}$ (13) **[1.5 т.]** ≈ 0,603 m. **[0.5 т.]**

Замествайки (13) и (12) в (11), се получава $n - 1 = \frac{1}{f\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)} = \frac{1}{f\left(\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_2}}{n_o-1}+\frac{\frac{1}{f}-\frac{1}{f_1}}{n_o-1}\right)} = \frac{\frac{f_{n_0}}{f_1}-1}{2-\frac{f}{f_2}-\frac{f}{f_1}}$,

откъдето $n = 1 + \frac{\frac{f_{n_0}}{f_1}-1}{2-\frac{f}{f_2}-\frac{f}{f_1}}$ **[1.5 т.]** ≈1,70. **[0.5 т.]**