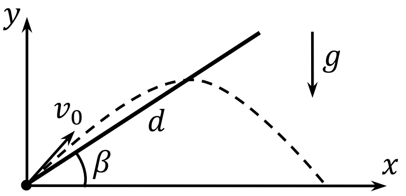
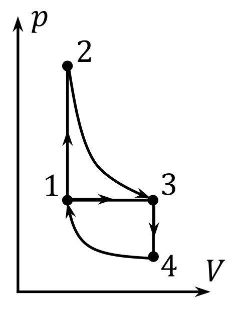
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
5 март 2022 г.
Решения на темата за VI състезателна група (12. клас)

Задача 1. Механика



а) Разстоянието от точката на хвърляне до мястото на удара е $d = \frac{y_{\max}}{\sin\beta} = \frac{y_{\max}}{\tan\beta}\sqrt{1+\tan^2\beta} = \frac{\sqrt{21}}{5}\ \mathrm{m} \approx 0{,}9\ \mathrm{m}$. **[1,5 т.]**
б) В координатната система на фигурата вляво законът за движение на тялото е: $x(t) = v_0\cos\alpha\, t,\ y(t) = v_0\sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$, където t е изминалото време от хвърлянето на тялото. **[1 т.]** Максималната височина на издигане се определя от условието за нулиране на скоростта по y: $v_0\sin\alpha - gt_{y\max} = 0$, откъдето след заместване в закона за движение по y следва, че $y_{\max} = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$. **[1 т.]** В момента на удара координатите на тялото са $x(t_{y\max}) = v_0\cos\alpha\, t_{y\max} = \frac{v_0^2\sin\alpha\cos\alpha}{g} = d\cos\beta$ и $y(t_{y\max}) = \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g} = d\sin\beta$. **[1 т.]** Като разделим двете уравнения едно на друго, ще получим, че $\tan\alpha = 2\tan\beta = \sqrt{3}$, откъдето $\alpha = 60^\circ$. **[1 т.]**
в) Големината на началната скорост е $v_0 = \frac{\sqrt{2gy_{\max}}}{\sin\alpha} = 4\ \mathrm{m/s}$. **[1 т.]**
г) Нека да използваме същата координатна система като в предните подусловия. В този случай скоростта на тялото е перпендикулярна на равнината в момента на удара. Може да се съобрази, че тогава $\frac{v_x}{|v_y|} = \frac{v_0\cos\alpha'}{gt_{\text{удар}} - v_0\sin\alpha'} = \tan\beta$, където $t_{\text{удар}}$ е изминалото време до удара. **[1 т.]** От друга страна, $\tan\beta = \frac{y(t_{\text{удар}})}{x(t_{\text{удар}})} = \frac{2v_0\sin\alpha' - gt_{\text{удар}}}{2v_0\cos\alpha'} = \frac{v_0\sin\alpha' - v_0\cos\alpha'\cot\beta}{2v_0\cos\alpha'} = \frac{\tan\alpha' - \cot\beta}{2}$. **[1,5 т.]**
Оттук следва, че $\tan\alpha' = 2\tan\beta + \cot\beta = \frac{5\sqrt{3}}{3}$, т.е. $\alpha' \approx 71^\circ$. **[1 т.]**

Задача 2. Топлинна машина



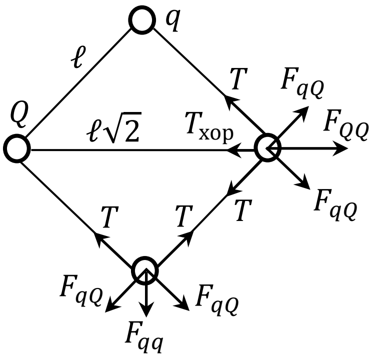
а) Процесите са представени на pV-диаграмата вляво. **[1 т.]**
б) Нека да означим с A'_{ij} работата на газа при процеса i-j. Като използваме I принцип на термодинамиката, може да съобразим, че при изохорния процес 1-2 газът получава топлина $Q_{12} = 3nR\Delta T/2$, тъй като $A'_{12} = 0$. **[0,5 т.]** При изотермния процес 2-3 се получава топлина $Q_{23} = A'_{23}$, а при изобарния процес 1-3 получената топлина е $Q_{13} = A'_{13} + \frac{3nR\Delta T}{2} = \frac{5nR\Delta T}{2}$, тъй като $p_1 = p_3$ и $A'_{13} = p_3V_3 - p_1V_1 = nR(T_2 - T_1) = nR\Delta T$ (използваме уравнението на Клапейрон-Менделеев). **[1,5 т.]** При процесите 3-4 и 4-1 газът отдава общо топлина $Q_{\text{отд}} = \frac{3nR\Delta T}{2} - A'_{41}$. **[1 т.]**
Разликата между работите при двата цикъла е $\Delta A' = A'_{1234} - A'_{134} = A'_{23} + A'_{41} - (A'_{13} + A'_{41}) = A'_{23} - A'_{13} = A'_{23} - nR\Delta T$. **[0,5 т.]** КПД за цикъла 1-2-3-4-1 е $\eta_{1234} = \frac{A'_{1234}}{Q_{12}+Q_{23}} = \frac{A'_{23}+A'_{41}}{Q_{12}+Q_{23}} = \frac{2{,}5nR\Delta T - Q_{\text{отд}} + \Delta A'}{2{,}5nR\Delta T + \Delta A'}$ **[1 т.]**, докато КПД за цикъла 1-3-4-1 е $\eta_{134} = \frac{A'_{134}}{Q_{13}} = \frac{A'_{13}+A'_{41}}{Q_{13}} = \frac{2{,}5nR\Delta T - Q_{\text{отд}}}{2{,}5nR\Delta T}$ **[0,5 т.]**. Полагаме $x \equiv 2{,}5nR\Delta T > 0$ и получаваме, че $\Delta\eta = \frac{x - Q_{\text{отд}} + \Delta A'}{x + \Delta A'} - \frac{x - Q_{\text{отд}}}{x} = \frac{Q_{\text{отд}}\Delta A'}{x(x+\Delta A')}$, откъдето следва квадратното уравнение $x^2 + x\Delta A' - \frac{Q_{\text{отд}}\Delta A'}{\Delta\eta} = 0$. **[1 т.]**

Положителният корен на уравнението е $\frac{1}{2}\left(\sqrt{(\Delta A')^2 + \frac{4Q_{\text{отд}}\Delta A'}{\Delta\eta}} - \Delta A'\right)$, т.е. $\Delta T = \frac{\Delta A'}{5nR}\left(\sqrt{1 + \frac{4Q_{\text{отд}}}{\Delta\eta\Delta A'}} - 1\right) \approx 36$ K. **[1 т.]**

в) Работата $A_{41} = -A'_{41} = Q_{\text{отд}} - \frac{3nR\Delta T}{2} = Q_{\text{отд}} - \frac{3\Delta A'}{10}\left(\sqrt{1 + \frac{4Q_{\text{отд}}}{\Delta\eta\Delta A'}} - 1\right) = 0{,}3$ kJ. **[1 т.]**

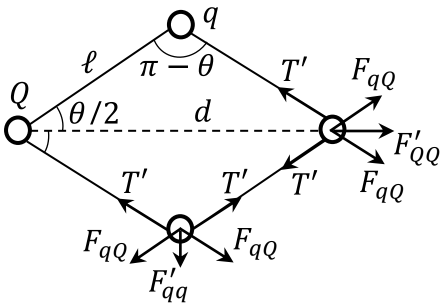
г) КПД са $\eta_{134} = \frac{x - Q_{\text{отд}}}{x} = 1 - \frac{2Q_{\text{отд}}}{\Delta A'\left(\sqrt{1+\frac{4Q_{\text{отд}}}{\Delta\eta\Delta A'}} - 1\right)} = 20\%$ и $\eta_{1234} = \eta_{134} + \Delta\eta = 25\%$. **[1 т.]**

Задача 3. Електростатика



а) Потенциалът в центъра на квадрата е сума от потенциалите на четирите заряда в тази точка: $\varphi_{\text{ц}} = \frac{2\sqrt{2}k(q+Q)}{\ell}$. **[1 т.]**

б) Системата е симетрична спрямо диагоналите на квадрата. Следователно силите на опън на четирите нишки по страните на квадрата са с една и съща големина T. **[0,5 т.]** На дясното топче действат силата $T_{\text{хор}}$ и две взаимно перпендикулярни сили на опън с големина T, чиято геометрична сума е вектор, насочен хоризонтално наляво, с големина $\sqrt{2}T$. Аналогично, векторната сума на силите F_{qQ}, с които горният и долният заряди действат на десния заряд, е сила с големина $\frac{\sqrt{2}kqQ}{\ell^2}$, насочена хоризонтално надясно. **[0,5 т.]** На десния заряд действа също така и левият заряд със сила с големина $F_{QQ} = \frac{kQ^2}{2\ell^2}$, насочена хоризонтално надясно. **[0,5 т.]** От условието за равновесие на дясното топче имаме, че $T_{\text{хор}} + \sqrt{2}T = \frac{kQ^2}{2\ell^2} + \frac{\sqrt{2}kqQ}{\ell^2}$. **[0,5 т.]** От фигурата по-горе може да се види, че условието за равновесие на долния заряд се изразява по следния начин: $\sqrt{2}T = \frac{kq^2}{2\ell^2} + \frac{\sqrt{2}kqQ}{\ell^2}$. **[1 т.]** Като извадим двете уравнения, получаваме $T_{\text{хор}} = \frac{k(Q^2 - q^2)}{2\ell^2}$. **[1 т.]**



в) След прерязването на хоризонталната нишка системата се разтяга в хоризонтално направление, тъй като $Q > q$ (вж. фигурата вляво), но остава симетрична спрямо диагоналите на така получения ромб. На дясното топче действат нови сили на опън T', които сключват ъгъл θ помежду си. Тяхната векторна сума е с големина $2T'\cos\theta/2$. Дължината на големия диагонал на ромба е $d = 2\ell\cos\theta/2$. **[0,5 т.]** Сумарната Кулонова сила върху дясното топче е насочена надясно и има големина $F'_{QQ} + 2F_{qQ}\cos\theta/2 = \frac{kQ^2}{d^2} + \frac{2kqQ\cos\theta/2}{\ell^2} = \frac{kQ^2}{4\ell^2\cos^2\theta/2} + \frac{2kqQ\cos\theta/2}{\ell^2}$. **[1 т.]** Условието за равновесие на дясното топче е $2T'\cos\frac{\theta}{2} = \frac{kQ^2}{4\ell^2\cos^2\theta/2} + \frac{2kqQ\cos\theta/2}{\ell^2}$. **[0,5 т.]** След подобни разсъждения се вижда, че за да бъде долното топче в равновесие, трябва да е изпълнено следното условие: $2T'\sin\frac{\theta}{2} = \frac{kq^2}{4\ell^2\sin^2\theta/2} + \frac{2kqQ\sin\theta/2}{\ell^2}$. **[2 т.]** Оттук $T' = \frac{kq^2}{8\ell^2\sin^3\theta/2} + \frac{kqQ}{\ell^2} = \frac{kQ^2}{8\ell^2\cos^3\theta/2} + \frac{kqQ}{\ell^2}$, т.е. $\tan\frac{\theta}{2} = \left(\frac{q}{Q}\right)^{2/3}$. **[1 т.]**