МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
12 – 14 март 2021 г., Стара Загора
Решения на задачите от Специалната тема

Задача 1. Хелмхолцови бобини.

а) Индукцията ΔB на магнитното поле, създадено от част от проводника с дължина Δl, по който тече ток I, в точка на разстояние z от равнината, в която лежи проводника, е $\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I\Delta l}{y^2}$, където $y = \sqrt{R^2 + z^2}$. **[0.5 т.]** Нейната проекция по оста на симетрия е $\Delta B_z = \Delta B \sin\alpha = \Delta B \frac{R}{y}$. **[0.5 т.]** Тъй като от съображения за симетрия индукцията на магнитното поле е насочена по оста на симетрия на кръговия проводник, то индукцията, създадена от целия проводник, е $B_1(z) = \sum \Delta B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{y^3}\sum \Delta l = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{IR}{y^3} 2\pi R = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I2\pi R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_0 I}{2R}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{z}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}$. **[1 т.]**

б) Нека разгледаме магнитното поле в околност на средата между двата проводника. Нека точка е на разстояние x от средата. Тогава индукцията на магнитното поле в тази точка е $B_2(z) = B_1\left(\frac{L}{2}+x\right) + B_1\left(\frac{L}{2}-x\right) = \frac{\mu_0 I}{2R}\left[\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}-x}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$. **[0.5 т.]** Тъй като функцията $B_2(x)$ е четна, то първата ѝ производна $\frac{dB_2(x)}{dx}(x=0)$ е нула, т.е. в средата стойността на индукцията на магнитното поле е екстремум (минимум или максимум). Функцията ще е „най-плоска“, когато и втората ѝ производна е нула. **[0.5 т.]**

Първата производна е $\frac{dB_2(x)}{dx} = \frac{\mu_0 I}{2R}\left[\left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\frac{1}{R^2}2\left(\frac{L}{2}+x\right)}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{R}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \left(-\frac{3}{2}\right)\frac{\frac{1}{R^2}2\left(\frac{L}{2}-x\right)(-1)}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}-x}{R}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right] = -\frac{3\mu_0 I}{2R^3}\left[\frac{\left(\frac{L}{2}+x\right)}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{R}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\left(\frac{L}{2}-x\right)}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}-x}{R}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\right]$. **[0.5 т.]** Втората производна е $\frac{d^2B_2(x)}{dx^2} = -\frac{3\mu_0 I}{2R^3}\left[\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{R}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{\left(\frac{L}{2}+x\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{R^2}2\left(\frac{L}{2}+x\right)}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}+x}{R}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}} - \frac{-1}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}-x}{R}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} - \frac{\left(\frac{L}{2}-x\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{R^2}2\left(\frac{L}{2}-x\right)(-1)}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}-x}{R}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}}\right]$. **[0.5 т.]**

Нейната стойност за $x = 0$ е $\frac{d^2B_2(x)}{dx^2}(x=0) = -\frac{3\mu_0 I}{2R^3}\left[\frac{2}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \frac{2\left(\frac{L}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)\frac{1}{R^2}2\left(\frac{L}{2}\right)}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{7}{2}}}\right] =$

$-\frac{3\mu_0 I}{R^3}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}}}\left[1-\frac{5\left(\frac{L}{2R}\right)^2}{1+\left(\frac{L}{2R}\right)^2}\right]$. **[1 т.]** Тя е равна на нула, когато $1-\frac{5\left(\frac{L}{2R}\right)^2}{1+\left(\frac{L}{2R}\right)^2}=0$, откъдето $L=R$ или $k=\frac{L}{R}=1$. **[1 т.]**

в) За $k=\frac{L}{R}=1$, $B_2\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{\mu_0 I}{R}\frac{1}{\left(1+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{\mu_0 I}{2R}2\sqrt{\frac{64}{125}}$. **[0.5 т.]**

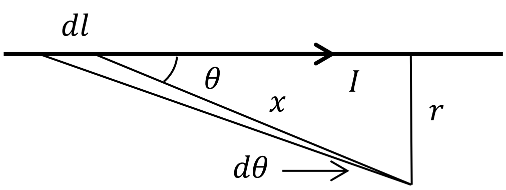
г) $B_2(0)=\frac{\mu_0 I}{2R}\left[\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}-\frac{L}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}+\frac{L}{2}}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{\mu_0 I}{2R}\left[1+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}\right]$.

$B_2\left(\frac{L}{4}\right)=\frac{\mu_0 I}{2R}\left[\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}-\frac{L}{4}}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left(1+\left(\frac{\frac{L}{2}+\frac{L}{4}}{R}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}\right]=\frac{\mu_0 I}{2R}\left[\frac{1}{\left(\frac{17}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}\right]$. Следователно $b_1=\frac{1+\frac{1}{2^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\frac{64}{125}}}\approx$ 0,9458, **[0.5 т.]** и $b_2=\frac{\frac{1}{\left(\frac{17}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}+\frac{1}{\left(\frac{25}{16}\right)^{\frac{3}{2}}}}{2\sqrt{\frac{64}{125}}}\approx 0{,}9958$. **[0.5 т.]**

д) Скоростта v, която придобиват електроните след ускоряването им от електричното поле, се определя от закона за запазване на енергията, $\frac{mv^2}{2}=eU$, откъдето $v=\sqrt{\frac{2eU}{m}}$. **[0.5 т.]** За да се движат по окръжност, скоростта на електроните трябва да е перпендикулярна на магнитните силови линии. Тогава центростремителната сила е силата на Лоренц, $\frac{mv^2}{r}=evB_2\left(\frac{L}{2}\right)$, откъдето $B_2\left(\frac{L}{2}\right)=\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2mU}{e}}$. **[0.5 т.]** Използвайки израза за $B_2\left(\frac{L}{2}\right)$ и отчитайки факта, че вместо един, има N проводника, то тогава $\frac{1}{r}\sqrt{\frac{2mU}{e}}=\frac{\mu_0 NI}{R}\sqrt{\frac{64}{125}}$, откъдето $N=\frac{R}{\mu_0 Ir}\sqrt{\frac{125mU}{32e}}$. **[0.5 т.]** След заместване, $N\approx 154$. **[1 т.]**

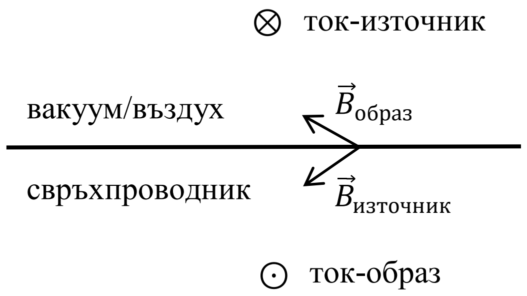
<u>Задача 2.</u> Ефект на Майснер.

а) Индукцията dB на магнитното поле, създадено от проводник с дължина dl, по който тече ток I, в точка на разстояние x от него, е $dB=\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{Idl\sin\theta}{x^2}$. От чертежа се вижда, че $x=\frac{r}{\sin\theta}$. Също така от синусовата теорема, приложена за триъгълника със страни dl и x, следва $\frac{x}{\sin\theta}\approx\frac{x}{\sin(\theta-d\theta)}=\frac{dl}{sin(d\vartheta)}\approx\frac{dl}{d\theta}$, откъдето $dl=\frac{x}{\sin\theta}d\theta=\frac{r}{(\sin\theta)^2}d\theta$. Замествайки в първото



равенство, $dB=\frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{r}{(\sin\theta)^2}d\theta\frac{(\sin\theta)^2}{r^2}=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\sin\theta\, d\theta$. **[1 т.]** Тъй като когато θ се мени от 0 до π, описва всички части на безкрайния проводник, то индукцията, създадена от безкрайния проводник, е $B=\int_0^{\pi}\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\sin\theta\, d\theta=\frac{\mu_0 I}{4\pi r}\int_0^{\pi}\sin\theta\, d\theta=-\frac{\mu_0 I}{4\pi r}(-1-1)=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$. **[1 т.]**

б) При доближаване на магнит до свръхпроводник, по повърхността му се индуцират свръхпроводящи токове (аналогично на ситуацията, когато до проводник се доближи електричен заряд и на повърхността му се индуцират електрични заряди). Разпределението на тези токове е такова, че магнитното поле, създадено от тях, напълно компенсира вътре в свръхпроводника магнитното поле, създадено от външния магнит. За да няма магнитно поле вътре в свръхпроводника, в него не трябва да влиза нито една магнитна силова линия. Тъй като магнитните силови линии са затворени криви, то силовата линия, минаваща безкрайно близо над повърхността на свръхпроводника, трябва да е права линия. Това означава, че индукцията създадена от правия проводник, по който тече ток, събрана с индукцията, създадена от индуцираните свръхпроводящи токове, трябва да е винаги вектор, успореден на повърхността. **[1 т.]** Това е възможно само ако магнитното поле, създадено от свръхпроводящите токове, е еквивалентно на магнитното поле, създадено от втори проводник, образ на реалния проводник (виж фигурата). **[1 т.]** Следователно, магнитното поле около проводника е еквивалентно на сумата от магнитните полета на тока-източник и тока-образ (забележете, че токът-образ тече в противоположна посока). Разстоянието между двата проводника е $2d$. Магнитното поле, създадено от тока-образ в точка от тока-източник, е $B(2d) = \frac{\mu_0 I}{2\pi 2d}$. Следователно, силата на отблъскване, действаща на проводника на единица дължина от него, от страна на свръхпроводника, е $\frac{F}{l} = B.I = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d}$. **[1 т.]**



в) Проводникът ще се намира в равновесие, когато силата на тежестта, действаща на единица дължина, е равна на силата на отблъскване, действаща на единица дължина, $\frac{F}{l} = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d_0} = \frac{\Delta m g}{\Delta l} = kg$, следователно $d_0 = \frac{\mu_0 I^2}{4\pi k g}$. **[2 т.]**

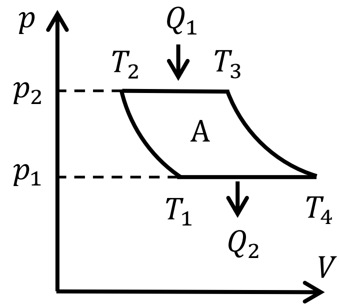
г) При отклонение на проводника на разстояние x нагоре, резултантната сила F, действаща на единица дължина от него, е $\frac{\mu_0 I^2}{4\pi(d_0+x)} - kg \approx \frac{\mu_0 I^2}{4\pi d_0}\left(1 - \frac{x}{d_0}\right) - kg = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi {d_0}^2}x$. **[1 т.]** Тъй като силата е пропорционална на отклонението от равновесното положение, трептенето е хармонично, $F = -\frac{\mu_0 I^2}{4\pi {d_0}^2}x = k\ddot{x}$, **[1 т.]** следователно периодът T на тези трептения е $T = 2\pi\sqrt{\frac{k}{\frac{\mu_0 I^2}{4\pi {d_0}^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{k}{\frac{d_0 k g}{{d_0}^2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{d_0}{g}}$. **[1 т.]**

<u>**Задача 3.**</u> **Турбореактивен двигател.**

а) Реактивната сила е $F_r = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}(v_e - v_i) = \rho S v_i (v_e - v_i)$. **[1 т.]**

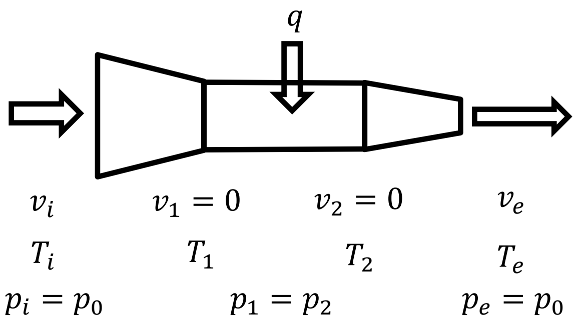
б) Коефициентът на полезно действие на двигателя е $\eta = \frac{A_{\text{полезна}}}{Q_{\text{получена}}} = \frac{F_r v_i}{q} = \frac{\rho S {v_i}^2 (v_e - v_i)}{q}$. **[1 т.]**

в) Коефициентът на полезно действие η_B на такъв цикъл е $\eta_B = \frac{A}{Q_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}$. Тъй като 2-3 и 4-1 са изобарни процеси, $Q_1 = C_p(T_3 - T_2)$, $Q_2 = C_p(T_4 - T_1)$, следователно $\eta_B = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$. **[0.5 т.]** От уравнението за адиабатния процес $p.V^\gamma = const.$ и уравнението на състоянието за идеален газ $\frac{pV}{T} = const.$, получаваме $p^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.T =$



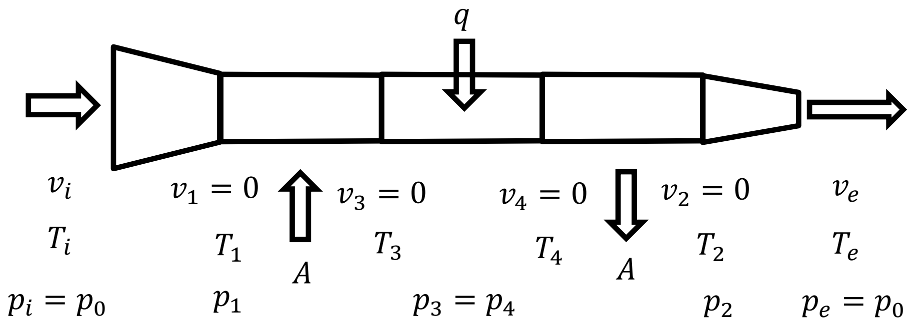
$const.$. Съответно за адиабатните процеси 1-2 и 3-4, $p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.T_1 = p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.T_2$ и $p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.T_4 = p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}.T_3$. Разделяйки двете уравнения, получаваме $\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$. **[0.5 т.]** Представяйки формулата за η_B във вида $\eta_B = 1 - \frac{T_1\left(\frac{T_4}{T_1}-1\right)}{T_2\left(\frac{T_3}{T_2}-1\right)}$, получаваме $\eta_B = 1 - \frac{T_1}{T_2}$, $\eta_B = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. **[1 т.]**

г) Нека разгледаме частта въздух между състояния „i" (влизащия) и „1" (преди поглъщането на топлина). Тази част въздух е отворена стационарна система (отляво влиза постоянно въздух с температура T_i и налягане $p_i = p_0$, а отдясно излиза същата маса въздух при температура T_1 и налягане p_1). Нека разгледаме преминаването на един мол въздух през тази система. Тъй като системата не се променя и процесът е адиабатен, ако навлизащият въздух нямаше кинетична енергия, тогава $U_i - U_1 = p_1V_1 - p_iV_i$, откъдето следва че величината, която се запазва в този случай, е $U_i + p_iV_i = U_1 + p_1V_1$ (нарича се енталпия). Обаче тъй като навлизащия въздух вкарва допълнително количество кинетична енергия, то $\frac{1}{2}\mu v_i^2 = U_1 + p_1V_1 - (U_i + p_iV_i) = C_VT_1 + RT_1 - (C_VT_i + RT_i) = C_p(T_1 - T_i)$. Следователно $T_1 - T_i = \frac{\frac{1}{2}\mu v_i^2}{C_p} = \frac{v_i^2}{2c_p}$ **[0.5 т.]**



За да получим формулата за скоростта v_e на изтичане на въздуха от двигателя, написваме връзките между състоянията „i", „1", „2" и „e": $T_1 - T_i = \frac{v_i^2}{2c_p}$ (2) (между „i" и „1"), $T_2 - T_e = \frac{v_e^2}{2c_p}$ (3) **[0.5 т.]** (между „e" и „2"), $q = \frac{\Delta m}{\Delta t}c_p(T_2 - T_1)$ **[0.5 т.]** (4) (между „1" и „2"). Допълнително от адиабатните процеси „i"-„1" и „2"-„e" следва, че $T_ip_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ и $T_2p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_ep_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$. **[0.5 т.]** Като отчетем факта, че $p_1 = p_2$ и разделим последните две равенства едно на друго, се получава $\frac{T_e}{T_i} = \frac{T_2}{T_1}$. **[0.5 т.]** (5) Така, използвайки (2), (3), (4) и (5), $\frac{v_e^2}{2c_p} = T_2 - T_e = T_2\left(1 - \frac{T_i}{T_1}\right) = \left(T_1 + \frac{q}{\frac{\Delta m}{\Delta t}c_p}\right)\left(1 - \frac{T_i}{T_1}\right) = \left(T_i + \frac{v_i^2}{2c_p} + \frac{q}{\frac{\Delta m}{\Delta t}c_p}\right)\left(1 - \frac{T_i}{T_i + \frac{v_i^2}{2c_p}}\right) =$ **[0.5 т.]** $= \left(T_i + \frac{v_i^2}{2c_p} + \frac{q}{\frac{\Delta m}{\Delta t}c_p}\right)\left(\frac{\frac{v_i^2}{2c_p}}{T_i + \frac{v_i^2}{2c_p}}\right)$, или $v_e^2 = v_i^2\left[1 + \frac{q}{\frac{\Delta m}{\Delta t}c_p\left(T_i + \frac{v_i^2}{2c_p}\right)}\right]$, $v_e = v_i\sqrt{1 + \frac{q}{\rho S v_i\left(c_pT_i + \frac{v_i^2}{2}\right)}}$. (6) **[0.5 т.]**

д) Аналогично на предното подусловие за да получим формулата за скоростта v_e на изтичане на въздуха от двигателя, написваме връзките между състоянията „i", „1", „3", „4" „2" и „e": $T_1 - T_i = \frac{v_i^2}{2c_p}$ (7) (между „i" и „1"), $T_2 - T_e = \frac{v_e^2}{2c_p}$ (8) (между „e" и „2"),



$q = \frac{\Delta m}{\Delta t} c_p (T_4 - T_3)$ (9) (между „3“ и „4“). Допълнително от адиабатните процеси „i“-„1“, „1“-„3“, „4“-„2“ и „2“-„e“ следва, че $T_i p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ (10), $T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 p_3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ (11), $T_4 p_4^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$(12) и $T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_e p_0^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$ (13). С разсъждения, аналогични на тези в началото на подусловие г), може да се докаже, че $\frac{A}{\frac{\Delta m}{\Delta t}} = c_p(T_3 - T_1) = c_p(T_4 - T_2)$, откъдето $T_3 - T_1 = T_4 - T_2$ (14). **[0.5 т.]** Така, използвайки връзки (8) и (14), $\frac{{v_e}^2}{2c_p} = T_2 - T_e = T_1 + T_4 - T_3 - T_e$ (15). От (10), (11), (12) и (13) следва, че $\frac{T_i}{T_3} = \frac{T_e}{T_4}$ (16). **[0.5 т.]** Замествайки (16) в (15), $\frac{{v_e}^2}{2c_p} = T_1 + T_4 - T_3 - \frac{T_4}{T_3} T_i$. **[0.5 т.]** Използвайки (9), $\frac{{v_e}^2}{2c_p} = T_1 + \frac{q}{\frac{\Delta m}{\Delta t} c_p} - (1 + \frac{q}{\frac{\Delta m}{\Delta t} c_p T_3}) T_i$. Използвайки (11), $\frac{{v_e}^2}{2c_p} = T_1 + \frac{q}{\frac{\Delta m}{\Delta t} c_p} - (1 + \frac{q}{\frac{\Delta m}{\Delta t} c_p T_1 b^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}) T_i$. **[0.5 т.]** Използвайки (7), $\frac{{v_e}^2}{2c_p} = T_i + \frac{{v_i}^2}{2c_p} + \frac{q}{\frac{\Delta m}{\Delta t} c_p} - (1 + \frac{q}{\frac{\Delta m}{\Delta t} c_p \left(T_i + \frac{{v_i}^2}{2c_p}\right) b^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}) T_i$. След преобразования, $v_e = \sqrt{{v_i}^2 + \frac{2q}{\rho S v_i}\left(1 - \frac{1}{\left(1 + \frac{{v_i}^2}{2c_p T_i}\right) b^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right)}$. (17) **[0.5 т.]** Вижда се, че при $b = 1$, (17) се опростява до (6).