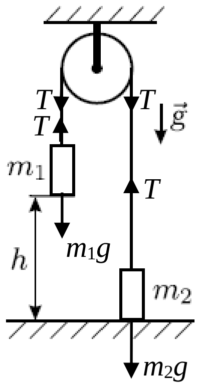
Решения на задачите от пролетното национално състезание по физика 2020-2021 г



Зад. 1. Решение

А) Понеже нишката и макарата са безтегловни, силата на опън по цялото протежение на нишката е една и съща. След като приложим втори закон на Нютон за двете тела се получават следните уравнения:

За тяло с маса m_1: $m_1 g - T = m_1 a$

За тяло с маса m_2: $T - m_2 g = m_2 a$

Отчели сме, че ускоренията на телата са равни ($a_1 = a_2 = a$).

След решаване на системата уравнения се получава:

$$a = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$$

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g$$

За верен отговор за ускорението и силата на опън (1 т)

Б) в момента на удара на m_1 в плоскостта и двете тела имат еднакви скрости:

$$v = \sqrt{2ah} = \sqrt{2gh.\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}} \qquad \textbf{(1 т)}$$

След като теглилката m_1 се удари в плоскостта, теглилката m_2 се намира на височина h. Но m_2 продължава да се движи нагоре. Понеже вече нишката няма да е опъната, движението нагоре ще равнозакъснително с големина на ускорението - земното ускорение g, при което ще се изкачи с още y.

$$H = h + y, \text{ но } y = \frac{v^2}{2g} \qquad \textbf{(1 т)}$$

След заместване намираме търсения отговор:

$$H = \frac{2m_1 h}{m_1 + m_2} \qquad \textbf{(1 т)}$$

В) След като m_2 достигне височината H, то започва да пада свободно, докато не се опъне нишката отново. Когато нишката се опъне m_2 ще има скорост v. Използваме закона за запазване на импулса, за да определим скоростта v_1, с която теглилката m_1 ще започне да се издига.

$$m_2 v = (m_1 + m_2)v_1$$

$$v_1 = \frac{m_2}{m_1+m_2} v = \frac{m_2}{m_1+m_2}\sqrt{2gh.\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}} \qquad \textbf{(1 т)}$$

Ускоренията на телата ще са същите, намерени в подусловие А. Следователно търсената височина h_1 е:

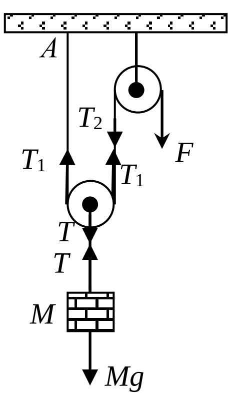
$$h_1 = \frac{v_1^2}{2a} \qquad \textbf{(1 т)}$$

След заместване с дадените величини и кратки математически преобразувания се получава:

$$h_1 = \left(\frac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 h \qquad \textbf{(1 т)}$$

Получава се максимална височина $h_1 < h$, т.е. теглилката с маса m_2 няма да достигне до плоскостта.

Част 2.

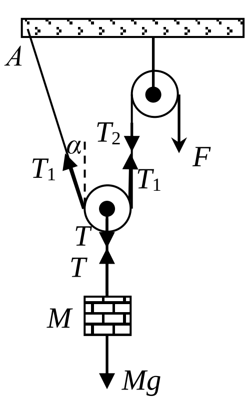


А) $F = T_2$;

Но $T_2 = T_1 = T/2$, от друга страна $T = Mg$.

$$F = \frac{Mg}{2} \qquad \textbf{(0,5 т)}$$

Б) Ще се запази равновесието. Чрез неподвижна макара само можем да променяме посоката на силата, но не се печели сила. **(0,5 т)**



В) Няма да се запази равновесието.

При преместване на точка A наляво равновесието се нарушава. След като приложим втория закон на Нютон за подвижната макара по вертикална ос, се получава очевидното неравенство:

$T_1 + T_1\cos\alpha - T < 0$,

Но $T = Mg$, следователно

$T_1 + T_1\cos\alpha < Mg$,

Теглилката ще започне да се спуска надолу. **(1 т)**

Г) При една подвижна макара

$$F = \frac{Mg}{2^1}$$

При две подвижни макари:

$$F = \frac{Mg}{2^2}$$

При три подвижни макари:

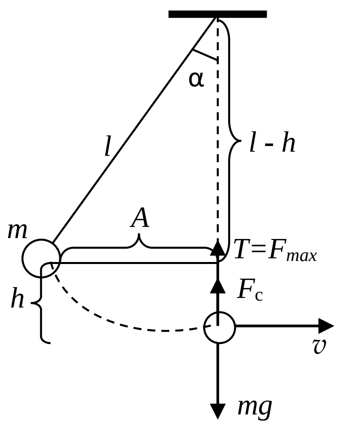
$$F = \frac{Mg}{2^3}$$

$$\dots$$

Лесно стигаме до извода, че при N подвижни макари

$$F = \frac{Mg}{2^N}$$ **(1 т)**

Зад. 2. Решение



Част 1. А) Времето t за достигане до равновесното положение е равен на четвърт период на махалото (T/4)

$$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} = 0{,}5\ s$$

Височината h може да се изрази чрез дължината l и ъгъла α.

$$h = l(1 - \cos\alpha)$$

Прилагаме закона за запазване на енергията:

$$mgh = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{2gl(1 - cos\alpha)}$$

$$v = \sqrt{gl} = 3{,}2\ m/s$$

За правилен отговор за скоростта и времето (1 т)

Б) Силата на опън в равновесната точка е равна на сумата от силата на тежестта и центростремителната сила:

$$F_{max} = mg + \frac{mv^2}{l} \qquad \textbf{(1 т)}$$

Използваме буквения резултат за скоростта v от подусловие **А)**

$$F_{max} = mg + mg = 2mg$$

$$F_{max} = 2\ \mathrm{N}$$

За достигане до верен отговор (1 т)

В) Общият вид на уравнението на хармонично трептене е:

$$x = A.\sin(\omega t + \varphi_0)$$

От чертежа се вижда, че амплитудата е $A = l.\sin\alpha = \sqrt{3}/2$

Кръговата честота: $\omega = 2\pi/T = \pi$. (периодът е T = 2 s)

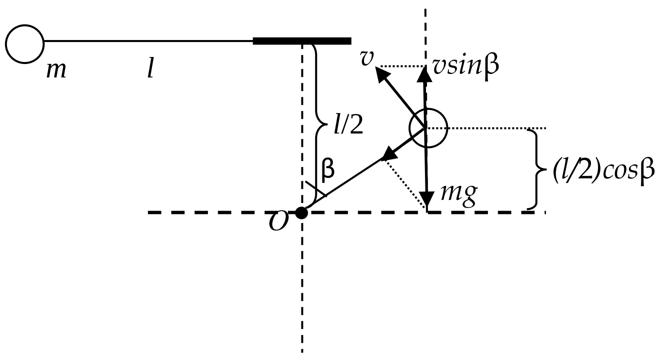
Началната фаза: $\varphi_0 = 90^o = \pi/2$ rad (махалото започва движението си от максимално отклонение)

Заместваме и се получава:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}\sin(\pi t + \frac{\pi}{2}) \qquad \textbf{(1 т)}$$

Да се приеме за верен отговор, ако законът е представен във вида:

$$x = \frac{\sqrt{3}}{2}cos(\pi t)$$



Част 2. А) Топчето ще се движи по окръжност, докато силата на опън T не стане равна на нула. След това то ще се движи само под действие на силата на тежестта, т.е. по парабола. За да намерим при какъв ъгъл β силата на опън T ще стане равна на нула използваме закона за запазване на енергията, като нулевото ниво преминава през т.O (отбелязано е с пунктир на чертежа):

$$mg\frac{l}{2} = \frac{mv^2}{2} + mg\frac{l}{2}cos\beta \qquad \textbf{(1 т)}$$

От друга страна при този ъгъл β силата на опън е равна на нула. Следователно компонентата на силата на тежестта в проекция по дължината на нишката е равна на центростремителната сила:

$$mgcos\beta = \frac{mv^2}{l/2} \qquad \textbf{(1 т)}$$

След решаване на двете уравнения се получава търсеният ъгъл:

$$cos\beta = \frac{2}{3}$$

И скоростта на махалото е: $v^2 = \frac{gl}{3}$

За верен отговор за скоростта и ъгъл β (1 т)

Б) След това движението на топчето е по парабола. Можем да го разгледаме като тяло хвърлено под ъгъл спрямо хоризонта. Максималната височина, до която ще се издигне топчето над тази позиция е:

$$h = \frac{v^2 sin^2\beta}{2g} \qquad \textbf{(1 т)}$$

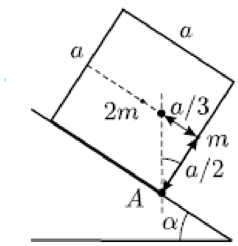
като използваме изразите за v и cosβ и връзката $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ се получава:

$$h = \frac{5l}{54} \qquad \textbf{(1 т)}$$

Следователно максималната височина на махалото е:

$$H_{max} = \frac{l}{2}cos\beta + h$$

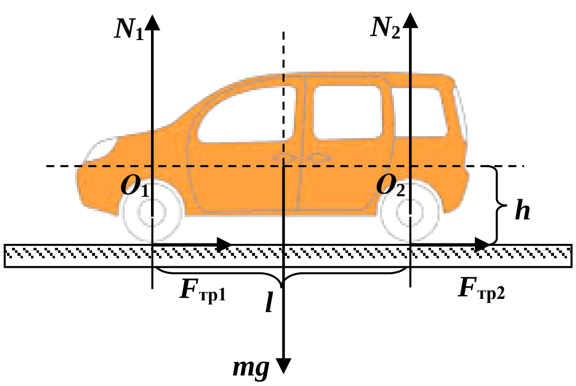
$$H_{max} = \frac{l}{3} + \frac{5l}{54} = \frac{23}{54}l \qquad \textbf{(1 т)}$$



Зад. 3. Част 1. Центъра на тежестта на всяка стена (квадрат) се намира в центъра на квадрата **(1 т)**. Лесно се съобразява, че центърът на тежестта на фигурата **П** се намира на разстояние $a/3$ от челната (долната) стена **(1 т)**. Граничният ъгъл на наклона на равнината е онзи ъгъл, при който центъра на масата на фигурата **П** лежи на перпендикуляра, минаващ през ръба (т.A).

$$tg\alpha = \frac{a/3}{a/2}$$

$$tg\alpha = \frac{2}{3}$$ **(1 т)**



Част 2. А) При спиране със задните колела уравнението за моментите на въртене спрямо т.O_1 е:

$$N_2 l - mg\frac{l}{2} + kN_2 h = 0$$ **(1 т)**

От това уравнение намираме N_2:

$$N_2 = \frac{mg}{2(1 + k\frac{h}{l})}$$

Следователно силата на триене $F_{тр2}$ е:

$$F_{тр2} = \frac{kmg}{2(1 + k\frac{h}{l})}$$

За достигане до верен отговор (1 т).

Б) Аналогично при спиране само с предните колела, уравнението за моментите на въртене спрямо т.O_2 има вида:

$$mg\frac{l}{2} - N_1 l + kN_1 h = 0$$ **(1 т)**

Намираме N_1:

$$N_1 = \frac{mg}{2(1 - k\frac{h}{l})}$$

Силата на триене в този случай е равна на:

$$F_{\text{тр}1} = \frac{kmg}{2(1 - k\frac{h}{l})}$$

За достигане до верен отговор (1 т)

В) При по-висок център на масата $F_{\text{тр}1}$ нараства, а $F_{\text{тр}2}$ намалява **(1 т)**.

Г) Изразяваме работата от силите на триене и в трите случая – спиране само с предните колела, само със задните колела и спиране с четирите колела:

$$A_1 = F_{\text{тр}2}.L_1 = \frac{kmgL_1}{2(1 + k\frac{h}{l})}$$

$$A_2 = F_{\text{тр}1}.L_2 = \frac{kmgL_2}{2(1 - k\frac{h}{l})}$$

При спиране и с четирите колела

$$A_3 = kmgL_3$$

Но $A_1 = A_2 = A_3$ (изменението на кинетичната енергия на автомобила е едно и също). След съвместно решаване на трите уравнения се получава:

$$L_3 = \frac{L_1 + L_2}{4}$$

За достигане до верен отговор **(2 т)**.