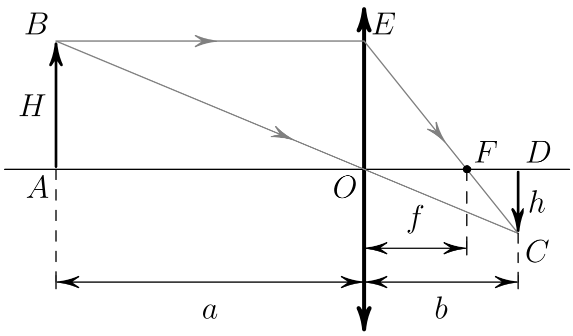
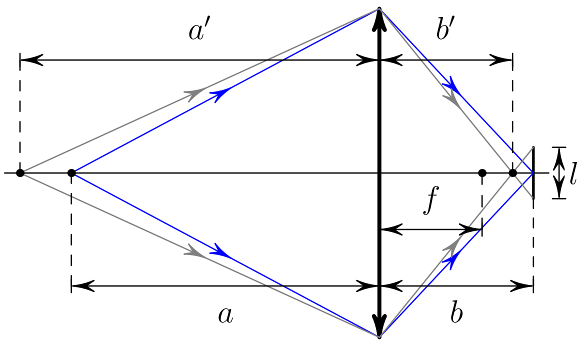
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
13 март 2021 г., гр. Стара Загора
Тема за X клас (четвърта състезателна група)
Решения и указания

Решение: 1.1. За да докажем връзката между f, a и b, ще използваме подобните триъгълници $\triangle AOB$ и $\triangle DOC$ (фиг. вляво), от които може да получим, че $H/a = h/b$. А от подобните триъгълници $\triangle OFE$ и $\triangle DFC$ имаме $H/f = h/(b-f)$. От





последните две съотношения изключваме H и h и получаваме $\dfrac{1}{f} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$. **(1 т.)**

Решение: 1.2. Разстоянието между лещата на обектива и лентата може да се изрази чрез увеличението на образа: $b = ah/H = 250 \cdot 24/96$ mm $= 62.5$ mm. **(0.5 т.)**

Решение: 1.3. Фокусното разстояние е $f = ab/(a+b) = 250 \cdot 62.5/(250+62.5)$ mm $=$ 50 mm. **(1 т.)**

Решение: 1.4. Ако преместим жичката с 5 cm назад, тя ще се намира на разстояние $a' = (25+5)$ cm $= 30$ cm от лещата, тогава образът ѝ ще се намира на разстояние $b' = a'f/(a'-f) = 60$ mm зад лещата. **(0.5 т.)** Нека диаметърът на апертурата е D, а ширината на образа върху филма е l (виж фигурата горе вдясно), тогава имаме следната връзка $D/b' = l/(b-b')$, **(1.5 т.)** откъдето за диаметъра на апертурата получаваме $D = b'l/(b-b') = 60 \cdot 1.5/(62.5-60)$ mm $= 36$ mm. **(0.5 т.)**

Решение: 1.5. Относителната апертура е $f/D \approx 1.4$. **(0.5 т.)**

Решение: 1.6. За да изразим Δa като функция на a, D, f и d, ще разгледаме точков източник, който е фокусиран когато се намира на разстояние a пред обектива. Както видяхме в подусловие **1.4.** когато преместим източника на разстояние $a' > a$ точката ще се фокусира пред лентата, а върху лентата ще се вижда петно с определен диаметър. Когато преместим източника на разстояние $a'' < a$ образът ѝ ще се фокусира зад лентата и отново ще виждаме петно с краен размер. Нека подберем разстоянията a' и a'' такива, че и в двата случая диаметърът на петното, което се вижда на лентата, не превишава d. В този случай дълбочината на фокуса ще е $\Delta a = a' - a''$. За определянето на a' може да използваме подусловие **1.4.**, където вместо l ще използваме d. Така може да запишем: $d/D = b/b' - 1$, където $b = af/(a-f)$, а $b' = a'f/(a'-f)$. Изключвайки b и b' от последните равенства за a' получаваме:

$$a' = \frac{afD}{fD - (a-f)d}. \textbf{ (1 т.)}$$

Аналогично може да запишем $d/D = 1 - b/b''$, **(0.5 т.)** където $b'' = a''f/(a''-f)$ или:

$$a'' = \frac{afD}{fD + (a-f)d}. \ \textbf{(1 т.)}$$

Окончателно за дълбочината на фокуса се получава:

$$\Delta a = a' - a'' = \frac{2afD(a-f)d}{(fD)^2 - (a-f)^2d^2} \approx \frac{2afD(a-f)d}{(fD)^2} = \frac{2a(a-f)d}{fD}, \ \textbf{(1 т.)}$$

$$\Delta a = \frac{2 \cdot 250(250-50) \cdot 0.03}{50 \cdot 9} \text{ mm} \approx 6.7 \text{ mm}. \ \textbf{(0.5 т.)}$$

Решение: 2.1. До момента на срещата децата се движат едно и също време $t_{\text{кр}}$. **(0.3 т.)** Първото дете изминава път $s_1 = v_1 t_{\text{кр}}$, **(0.2 т.)** а второто път $s_2 = v_2 t_{\text{кр}}$, **(0.2 т.)** като $s_1 + s_2 = 2(d_1 + d_2)$. **(0.3 т.)** Така може да получим $s_1 = 2(d_1 + d_2)v_1/(v_1 + v_2) = 2 \cdot 9.5 \cdot 1/2.5$ m $= 7.6$ m. **(0.5 т.)** Оста Ox е ориентирана по стената d_1, тогава координатите на срещата ще са $x_{\text{кр}} = d_1 = 5$ m и $y_{\text{кр}} = s_1 - d_1 = 2.6$ m. **(0.5 т.)**

Решение: 2.2. Дължината на ластика L се определя от положенията на децата. Нека означим координатите на първото дете с (x_1, y_1), а на второто с (x_2, y_2). От Питагоровата теорема за L може да запишем, че $L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$. **(0.5 т.)**

Да разгледаме моментите от време, в които става промяна на начина, по който се изменят координатите на децата. Второто дете се движи с по-голяма скорост и първоначално е до по-късата стена, т.е. то ще стигне първо до съседния му ъгъл с координати $(0, d_2)$ в момента $t_1 = d_2/v_2 = 3.0$ s. Първото дете ще стигне съседния му ъгъл с координати $(d_1, 0)$ в момента $t_2 = d_1/v_1 = 5.0$ s. Второто дете ще стигне в (d_1, d_2) в момента $t_3 = (d_2 + d_1)/v_2 = 19/3$ s $= 6.3$ s. Двете деца ще се срещнат в т. $(x_{\text{кр}}, y_{\text{кр}})$ в момента $t_{\text{кр}} = s_1/v_1 = 7.6$ s. От всичко това $L(t)$ може да се запише по следния начин:

$$L(t) = \begin{cases} \sqrt{(v_1t)^2 + (v_2t)^2} = t\sqrt{v_1^2 + v_2^2}, \ t \in [0, t_1); \ \textbf{(0.5 т.)} \\ \sqrt{(v_2t - d_2 - v_1t)^2 + d_2^2}, \ t \in [t_1, t_2); \ \textbf{(0.5 т.)} \\ \sqrt{(v_2t - d_2 - d_1)^2 + (d_2 - v_1t + d_1)^2}, \ t \in [t_2, t_3); \ \textbf{(0.5 т.)} \\ \sqrt{[d_2 - (v_2t - d_2 - d_1) - (v_1t - d_1)]^2} = |2(d_1 + d_2) - (v_1 + v_2)t|, \ t \in [t_3, t_{\text{кр}}]. \\ \textbf{(0.5 т.)} \end{cases}$$

$$L(t) = \begin{cases} 1.8t, \ t \in [0.0, 3.0) \text{ s}; \ \textbf{(0.5 т.)} \\ \sqrt{0.25t^2 - 4.5t + 40.5}, \ t \in [3.0, 5.0); \ \textbf{(0.5 т.)} \\ \sqrt{3.25t^2 - 47.5t + 180.5}, \ t \in [5.0, 6.3); \ \textbf{(0.5 т.)} \\ 19 - 2.5t, \ t \in [6.3, 7.6]. \ \textbf{(0.5 т.)} \end{cases}$$

Решение: 2.3. От предното подусловие се вижда, че дължината на ластика нараства линейно с времето през първите три секунди. След това $L^2(t)$ е квадратична функция от вида $at^2 + bt + c$. При $a > 0$ функцията е намаляваща в интервала $\left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right]$. **(1 т.)** В конкретния случай $-\frac{b}{2a} = 9$ s, така че в интервала $t \in [3.0, 5.0)$ $L^2(t)$ ще намалява, съответно $L(t)$ също ще намалява. **(1 т.)** Така максималната дължина на ластика ще е при $t = t_\mathrm{m} = 3$ s, а $L_\mathrm{m} = 1.8 t_\mathrm{m} = 5.4$ m. **(1.5 т.)**

Решение: 3.1. Тяло 2 има по-голям обем в сравнение с тяло 1, така че на него ще му действа по-голяма изтласкваща сила и теглото му ще намалее повече в сравнение с това на тяло 1. **(0.5 т.)** Тъй като телата все още са закачени в краищата на лоста, то тяло 2 ще се вдигне нагоре, а тяло 1 ще падна надолу, тоест лостът се завърта по посока на часовниковата стрелка. **(0.5 т.)**

Решение: 3.2. Да въведем следните означения:

P_1 - теглото на тяло 1 във въздух;

P_2 - теглото на тяло 2 във въздух;

P - теглото на изместената от тяло 1 вода;

l_1 - разстояние от тялото 1 до опорната точка, когато лостът е във въздуха;

l_2 - разстояние от тялото 2 до опорната точка, когато лостът е във въздуха;

d_1 - разстояние от тялото 1 до опорната точка, когато лостът е във водата.

По условие знаем, че ако потопим тяло 1 във вода то теглото му P_1 ще намелее с 14.1%. От друга страна, това е теглото на изместената от тялото вода или $P = 0.141 P_1 = m_\text{в} g = \rho_\text{в} V_1 g$, откъдето за теглото на тяло 1 получаваме

$$P_1 = \rho_\text{в} V_1 g / 0.141 = (1000 \cdot 200 \cdot 10^{-6} \cdot 10/0.141)\ \text{N} \approx 14.2\ \text{N}. \ \textbf{(1 т.)}$$

При уравновесен във въздуха лост може да запишем, че $P_1 l_1 = P_2 l_2$. **(0.5 т.)** От тук може да изразим теглото на тяло 2, за което получаваме

$$P_2 = P_1 l_1 / l_2 = (14.2 \cdot 0.7/1)\ \text{N} = 9.9\ \text{N}, \textbf{(0.5 т.)}$$

съответно масите на телата са

$$m_1 = \rho_\text{в} V_1 / 0.141 \approx 1.42\ \text{kg}\ \textbf{(0.5 т.)}\ \text{и}\ m_2 = \rho_\text{в} V_1 g l_1 / (0.141 l_2) \approx 0.99\ \text{kg}.\ \textbf{(0.5 т.)}$$

Когато лостът е уравновесен във вода имаме:

$$(P_1 - P) d_1 = (P_2 - 3P) l_2.\ \textbf{(1 т.)}$$

След като вече знаем теглата на двете тела, от горното равенство може да изразим d_1, а разстоянието d може да получим, като $l_1 - d_1$

$$d = l_1 - (P_2 - 3P) l_2 / (P_1 - P) \approx 0.38\ \text{m}.\ \textbf{(0.5 т.)}$$

Решение: 3.3. Нека означим дължината на лоста с $l = l_1 + l_2$. В десния край на лоста ще действа сила P_1, а в левия сила $P_2 - P_3/2$, тъй като тяло 3 е закачено на подвижната макара. **(1.5 т.)** За да е в равновесие лостът трябва да е изпълнено следното условие $(P_2 - P_3/2)x = P_1(l - x)$, **(0.5 т.)** откъдето определяме разстоянието x

$$x = P_1 l/(P_1 + P_2 - P_3/2) \approx 1.15 \text{ m } \textbf{(0.5 т.)}$$

Решение: 3.4. Може да разгледаме „тежкия“ лост като лост с пренебрежима маса, в центъра на който е закачено тяло с маса равна на масата на лоста и тегло $P_{\text{л}} = 6.8$ N. **(0.5 т.)** Да разгледаме два случая. В първия случай опорната точка се намира по-близо до десния край, на разстояние x от центъра на лоста. При равновесие ще е изпълнено: $P_1(l/2 - x) = P_3(l/2 + x) + P_{\text{л}}x$ откъдето получаваме: $x = (P_1 - P_3)l/(P_1 + P_3 + P_{\text{л}}) = 0.5$ m. Във втория случай опорната точка ще е по-близо до левия край на лоста: $P_1(l/2 + x) + P_{\text{л}}x = P_3(l/2 - x)$ откъдето получаваме: $x = -(P_1 - P_3)l/(P_1 + P_3 + P_{\text{л}})$ което е отрицателно число, т.е. опорната точка не може да бъде от тази страна на лоста. **(1.5 т.)**