МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
08–10 март 2019 г., гр. Вършец
Специална тема
Решения и указания

Решение: 1.1.1. Когато електронът е на повърхността на кълбото, му действа сила $|\vec{F}| = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^2}$. Под действие на тази сила електронът започва да се движи към центъра на кълбото. Да разгледаме движението на електрона в координатна система, свързана с центъра на кълбото, като оста Ox минава през началното положение на електрона. Когато електронът се намира на разстояние x от началото на координатната система, му действа сила в следствие на привличането му от положителния заряд $Q_{\text{обхв}}$, обхванат от сфера с радиус x. **(0.5 т.)** Тъй като кълбото е еднородно, можем да въведем плътност на заряда $\rho = 3e/(4\pi r_0^3)$. Ако означим единичния вектор по оста x с $\hat{x} = \vec{x}/x$, тогава за силата може да запишем:

$$\vec{F}(x) = -\frac{eQ_{\text{обхв}}}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{x} = -\frac{e\rho\frac{4}{3}\pi x^3}{4\pi\varepsilon_0 x^2}\hat{x} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}x\hat{x} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0^3}\vec{x}.\ \textbf{(0.5 т.)}$$

Равнодействащата сила е от вида $\vec{F} = -k\vec{x}$ и електронът извършва *хармонично трептене* с кръгова честота $\omega_0 = e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e r_0^3}$ и амплитуда r_0. **(0.5 т.)** Отчитайки началните условия $x(0) = r_0$, законът за движението е:

$$x(t) = r_0\cos(\omega_0 t) = r_0\cos\left(\frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e r_0^3}}t\right).\ \textbf{(0.5 т.)}$$

Решение: 1.1.2. За да пресметнем $\langle P\rangle$ ни трябва ускорението, с което се движи електронът. То може да се получи като диференцираме два пъти по времето закона за движение:

$$a = -\omega_0^2 r_0\cos(\omega_0 t).\ \textbf{(0.5 т.)}$$

Заместваме a в (1.1) и се получава:

$$P = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\omega_0^4 r_0^2\cos^2(\omega_0 t) = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\omega_0^4 r_0^2\frac{1+\cos(2\omega_0 t)}{2}.$$

Мощността на излъчване се променя с честота два пъти по-голяма от честотата на трептенията. Ако я усредним за време $t_0 = \pi/\omega_0$, средната стойност на $\cos(2\omega_0 t_0)$ е нула, което значително улеснява пресмятането. **(1 т.)** Усреднената мощност е:

$$\langle P\rangle_{t\in\left[0,\frac{\pi}{\omega_0}\right]} = \frac{e^2\omega_0^4 r_0^2}{12\pi\varepsilon_0 c^3} = \frac{e^6}{3(4\pi\varepsilon_0 c)^3 m_e^2 r_0^4}.\ \textbf{(1 т.)}$$

Решение: 1.2.1. От втория закон на Нютон записваме ускорението на електрона:

$$a(r) = \frac{v(r)^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r^2}.\ \textbf{(0.5 т.)}$$

Пълната енергия е сума от кинетичната и потенциалната енергия:

$$E(r) = \frac{1}{2} m_e v^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{1}{2} m_e \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}. \ \mathbf{(1\,т.)}$$

Решение: 1.2.2. Периода на електрона е $T = 2\pi r/v$. Тогава загубата на енергия за един период е:

$$E_з = \frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{2\pi r}{v} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{v^4}{r^2}\frac{2\pi r}{v} = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 c^3}\frac{v^3}{r} = \frac{e^2}{3\varepsilon_0 c^3 r}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r}\right)^{3/2}. \ \mathbf{(0.5\,т.)}$$

Решение: 1.2.3. В **1.2.1.** намерихме пълната енергия на електрона, ако вземем първата ѝ производна по времето, получаваме:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt}\right) = \frac{e^2 \dot{r}}{8\pi\varepsilon_0 r^2}, \ \mathbf{(0.5\,т.)}$$

където с $\dot{r}$ сме означили първата производна на радиуса по времето. Горната формула ни дава скоростта на изменение на енергията с времето, което е мощността на излъчване, определена от формулата на Лармор. Приравняваме двата израза и се получава:

$$\frac{e^2\dot{r}}{8\pi\varepsilon_0 r^2} = -\frac{e^2 a^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} = -\frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0 m_e)^2 r^4} = -\frac{2}{3}\frac{e^6}{(4\pi\varepsilon_0 c)^3 m_e^2 r^4}, \ \mathbf{(0.5\,т.)}$$

знакът минус показва, че енергията намалява. Последното равенство може да се презапише като:

$$r^2\dot{r} \equiv r^2\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0 m_e)^2 c^3}.$$

Разделяме променливите и интегрираме:

$$\int\limits_{r_0}^{0} r^2 dr = -\int\limits_{0}^{t_ж}\frac{4}{3}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0 m_e)^2 c^3}dt, \qquad \left.\frac{r^3}{3}\right|_{r_0}^{0} = -\left.\frac{4}{3}\frac{e^4}{(4\pi\varepsilon_0 m_e)^2 c^3}t\right|_{0}^{t_ж}.$$

Времето на живот на такъв атом е:

$$t_ж = \frac{(4\pi\varepsilon_0 m_e)^2 (r_0 c)^3}{4e^4} \approx 1.6 \times 10^{-11}\ \mathrm{s}. \ \mathbf{(2\,т.)}$$

Решение: 1.2.4. Скоростта на електрона е $v = e/\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m_e r}$, откъдето лесно определяме радиуса на търсената орбита $r = 100e^2/(4\pi\varepsilon_0 m_e c^2) \approx 2.8 \times 10^{-13}$ m. **(0.4 т.)**

Кинетичната енергия нараства, но в следствие на излъчването намалява пълната енергия, при което намалява и разстоянието r. С r намалява и потенциалната енергия. Загубите са в следствие на намаляване на потенциалната енергия. **(0.1 т.)**

Решение: 2.1. Да разгледаме движението на топката в координатна система, свързана с началното положение на топката. Положителната посока на оста Oy

е насочена вертикално нагоре (съвпада по посока с $\vec{v}_0$). В такава координатна система резултантната сила, действаща на топката, е:

$$-Mg - \frac{1}{2}C_{\text{D}}\rho S v^2 = M\frac{dv}{dt}, \quad -g - \frac{1}{2}\frac{C_{\text{D}}\rho S}{M}v^2 = \frac{dv}{dt}, \quad -g - Bv^2 = \frac{dv}{dt}. \ \textbf{(0.5 т.)} \quad (1)$$

За удобство в последното равенство сме въвели константата $B = C_{\text{D}}\rho S/(2M)$. Максималната височина $h_{\max}$, на която се издига топката, може да определим от зависимостта $y = y(v)$, като използваме, че $y(v = 0) = h_{\max}$. Да презапишем равенство (1) във вида:

$$-g - Bv^2 = \frac{dv}{dt} = \frac{dy}{dt}\frac{dv}{dy} = v\frac{dv}{dy}, \quad -g - Bv^2 = v\frac{dv}{dy}. \ \textbf{(0.5 т.)}$$

Разделяме променливите и получаваме:

$$dy = -\frac{v}{g + Bv^2}dv = -\frac{1}{2(g + Bv^2)}dv^2 = -\frac{1}{2B(g + Bv^2)}d(g + Bv^2).$$

Интегрираме последния израз и се получава:[(1)]

$$\int\limits_0^y dy' = -\frac{1}{2B}\int\limits_{v'=v_0}^{v'=v}\frac{1}{g + Bv'^2}d(g + Bv'^2), \quad y = -\frac{1}{2B}\ln\left(g + Bv'^2\right)\Bigg|_{v'=v_0}^{v'=v},$$

$$y = \frac{1}{2B}\ln\frac{g + Bv_0^2}{g + Bv^2}, \quad h_{\max} = \frac{1}{2B}\ln\left(1 + \frac{Bv_0^2}{g}\right),$$

$$h_{\max} = \frac{M}{C_{\text{D}}\rho S}\ln\left(1 + \frac{C_{\text{D}}\rho S v_0^2}{2Mg}\right) = \frac{M}{C_{\text{D}}\rho\pi r_0^2}\ln\left(1 + \frac{C_{\text{D}}\rho\pi r_0^2 v_0^2}{2Mg}\right). \ \textbf{(1.5 т.)}$$

За да пресметнем числената стойност за $h_{\max}$, трябва да пресметнем плътността на въздуха. От уравнението на състоянието на идеален газ $p_0 V = \dfrac{m}{\mu_{\text{в}}}RT_0$ и $\mu_{\text{в}} = 2\mu_{\text{O}}0.21 + 2\mu_{\text{N}}0.79 = 29$ g/mol **(0.5 т.)** за плътността на въздуха, при дадените условия, се получава $\rho = \dfrac{\mu_{\text{в}} p_0}{RT_0} = 1.2$ kg/m^3, **(0.5 т.)** заместваме в израза $h_{\max}$ и получаваме $h_{\max} \approx 15$ m. **(0.5 т.)**

Решение: 2.2. По условие топката се удря в площадката, като ударът е идеално еластичен – без загуба на енергия. Може да предположим, че ударът става достатъчно бързо и газът в топката не може да обмени топлина с околната среда – газът се свива адиабатно. От закона за запазване на енергията следва, че кинетичната енергия на топката преди удара преминава във вътрешна енергия на газа и температурата му нараства. За да определим кинетичната енергия на топката трябва да пресметнем скоростта ѝ точно преди удара. Нека този път началото на координатната система се намира в най-високата точка от траекторията на

[(1)] За да запишем израза математически коректно сме сменили интеграционните променливи y и v съответно с y' и v'.

топката. Положителната посока на оста Oy е насочена надолу и съвпада по посока с $\vec{g}$. Резултантната сила този път е:

$$Mg - \frac{1}{2}C_{\mathrm{D}}\rho S v^2 = M\frac{dv}{dt}, \quad g - Bv^2 = v\frac{dv}{dy}.$$

Отново може да разделим променливите и да интегрираме:

$$\int\limits_0^{h_{\max}} dy = \int\limits_0^{v_{\max}} \frac{v}{g - Bv^2}dv = -\frac{1}{2B}\int\limits_{v=0}^{v_{\max}} \frac{1}{g - Bv^2}d(g - Bv^2) = -\frac{1}{2B}\ln\left(g - Bv^2\right)\Big|_{v=0}^{v_{\max}},$$

$$h_{\max} = -\frac{1}{2B}\ln\left(1 - \frac{Bv_{\max}^2}{g}\right), \quad -2Bh_{\max} = \ln\left(1 - \frac{Bv_{\max}^2}{g}\right),$$

$$\exp\left(-2Bh_{\max}\right) = 1 - \frac{Bv_{\max}^2}{g}, \quad 1 - \exp\left(-2Bh_{\max}\right) = \frac{Bv_{\max}^2}{g},$$

$$v_{\max} = \sqrt{g\left[1 - \exp\left(-2Bh_{\max}\right)\right]/B} \approx 15\ \mathrm{m/s}.\ \textbf{(1 т.)}$$

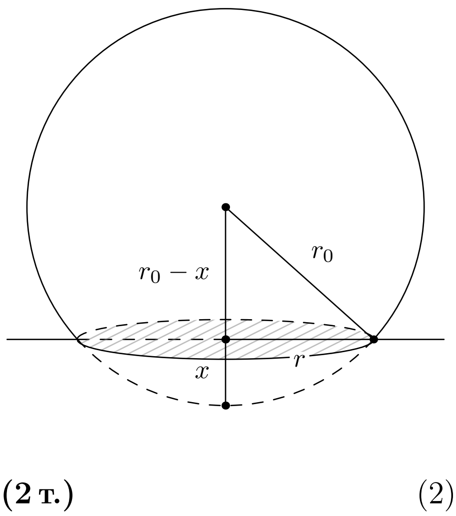
От закона за запазване на енергията и първия принцип на термодинамиката за изменението на вътрешната енергия на газа се получава:

$$\Delta U = c_V m_{\text{в}}(T_{\max} - T_0) = \frac{1}{2}Mv_{\max}^2,\ \textbf{(1 т.)}$$

където $m_{\text{в}} = (p_0 + \Delta p_0)V_0\mu_{\text{в}}/(RT_0)$ е масата на газа в топката, а $V_0 = \frac{4}{3}\pi r_0^3$ е обемът на топката.

$$T_{\max} = T_0 + \frac{Mv_{\max}^2}{2c_V m_{\text{в}}} = T_0\left[1 + \frac{Mv_{\max}^2 R}{2c_V\mu_{\text{в}}(p_0 + \Delta p_0)V_0}\right] \approx 307\ \mathrm{K}\ \textbf{(1.5 т.)}$$

Решение: 2.3. Силата, с която топката действа на площадката, е равна на $F' = \Delta p S$, където $\Delta p = \mathrm{const}$ е разликата в налягането на въздуха в топката (по време на удара) и атмосферното налягане. S е площта, с която топката се допира в площадката. От третия закон на Нютон следва, че площадката действа на топката със същата сила, но в противоположна посока. Площта S можем да изразим като $S = \pi r^2 = \pi\left[r_0^2 - (r_0 - x)^2\right] \approx 2\pi r_0 x$ **(0.5 т.)** (виж фигурата вдясно), където x е деформацията на топката. Ако заместим S в израза за силата се получава $F = -2\pi\Delta p r_0 x$. Силата е пропорционална на деформацията, значи може да разгледаме свиването на топката като трептене с кръгова честота $\omega_0^2 = 2\pi\Delta p r_0/M$ и период $T = 2\pi/\omega_0$. Тогава топката е в контакт със площадката за време $\tau = T/2$:



$$\tau = \sqrt{\frac{\pi M}{2\Delta p_0 r_0}} \approx 10\ \mathrm{ms.}\ \textbf{(2 т.)} \tag{2}$$

За пресмятане на времето на контакт сме използвали началното налягане в топката Δp_0, както и че $M \gg m_{\text{в}}$.

Решение: 3.1. Нека всички параметри, отнасящи се за газа в лявата част на цилиндъра, имат индекс 1, а всички в дясната, индекс 2. Газът в лявата част е топлинно изолиран отвсякъде, така че не получава количество топлина и може да запишем $\delta Q_1 = C_V dT_1 + p_1 dV_1 = C_V dT_1 + RT_1 dV_1/V_1 = 0$, **(1 т.)** където C_V е топлинният капацитет на газа при постоянен обем. Уравненията са записани за един мол идеален газ. Оттук директно получаваме топлинния капацитет $C_1 = \delta Q_1/dT = 0$. **(0.5 т.)** За газа във дясната част може да запишем $\delta Q_2 = C_V dT_2 + p_2 dV_2 = C_V dT_2 + RT_2 dV_2/V_2$. **(0.5 т.)** Газът се нагрява много бавно съответно и буталото се движи много бавно и налягането в двете части на цилиндъра е еднакво във всеки един момент, откъдето следва че $V_1/T_1 = V_2/T_2$ или $dV_1/V_1 - dV_2/V_2 = dT_1/T_1 - dT_2/T_2$. Също така може да отчетем, че обема не цилиндъра не се променя или $dV_1 + dV_2 = 0$. **(1.5 т.)** От последните уравнения може да изразим dV_2/V_2 чрез dT_2/T_2. Заместваме в израза за δQ_2 и коефициентът пред dT_2 е топлинният капацитет на газа в дясната част:

$$C_2 = C_V \gamma \frac{V_1 + V_2}{V_1 + \gamma V_2} = \frac{5}{2} R \frac{7}{5} \frac{V_1 + V_2}{V_1 + 7V_2/5} = \frac{7}{2} \frac{V_1 + V_2}{V_1 + 7V_2/5} R = \frac{35}{2} \frac{V_1 + V_2}{5V_1 + 7V_2} R. \ \textbf{(2.5 т.)}$$

В последното равенство сме отчели, че газът е двуатомен и има $i = 5$ степени на свобода, тогава $\gamma = (i+2)/i = 7/5$, $C_V = (i/2)R = 5R/2$. **(0.5 т.)**

Решение: 3.2. В този случай газът в лявата част може да обменя топлина с околната среда и тъй като буталото отново се движи много бавно, то температурата T_1 не се променя или $C_1 = \delta Q_1/dT_1 = \infty$. **(0.5 т.)** За газа във дясната част отново може да запишем $\delta Q_2 = C_V dT_2 + p_2 dV_2 = C_V dT_2 + RT_2 dV_2/V_2$, като използваме, че $dT_1 = 0$, **(0.5 т.)** $dV_1 = -dV_2$ и заместим в $dV_1/V_1 - dV_2/V_2 = dT_1/T_1 - dT_2/T_2$ може да изразим δQ_2 чрез dT_2 и за топлинния капацитет получаваме:

$$C_2 = C_V \frac{\gamma V_1 + V_2}{V_1 + V_2} = \frac{5}{2} \frac{7V_1/5 + V_2}{V_1 + V_2} R = \frac{1}{2} \frac{7V_1 + 5V_2}{V_1 + V_2} R. \ \textbf{(2.5 т.)}$$