МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

9-11 март 2018 г., гр. Стара Загора

Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Механика

а) На тялото действат две сили: реакцията на опората N и силата на тежестта G. Тъй като тялото се движи по окръжност, резултантната на всички сили има единствено хоризонтална компонента, която се явява центростремителна сила. Така получаваме:

$$N\cos\theta = mg,$$
$$N\sin\theta = \frac{mv_h^2}{r_0}, \text{ [1 т.]}$$

където θ е ъгълът между допирателната към повърхността и хоризонталата. Следователно $\tan\theta = \frac{v_h^2}{gr_0}$. Същевременно имаме $\tan\theta = \frac{dz}{dr} = 2kr_0$, откъдето $v_h^2 = 2kgr_0^2 = 2gz_0$. Окончателно получаваме $v_h = \sqrt{2gz_0}$. **[1 т.]**

б) Означаваме максималната височина със z, съответния радиус с r и съответната скорост с v. От закона за запазване на енергията имаме

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgz_0 = \frac{mv^2}{2} + mgz\,. \text{ [1 т.]}$$

Да разгледаме въртящия момент, който създават двете сили спрямо оста z: $\vec{M} = \vec{r}\times\left(\vec{N}+\vec{G}\right)$.

Тъй като $M_z = 0$ и $\frac{dL_z}{dt} \equiv M_z$, имаме $L_z = \text{const}$, т.е. z-компонентата на момента на импулса се запазва. Следователно

$$mv_0r_0 = mvr\text{, т.е. } v = v_0\sqrt{\frac{z_0}{z}}\,. \text{ [1 т.]}$$

Така за максималната височина получаваме $z = \frac{v_0^2}{2g}$. **[1 т.]**

в) Ще разгледаме два подхода: динамичен и енергетичен.

Динамичен:

Тъй като z_0 е малко, за ъгъла на допирателната имаме

$$\sin\theta \approx \theta \approx \tan\theta = \frac{dz}{dr} = 2kr \quad\text{и}\quad \cos\theta \approx 1\,. \text{ [0.25 т.]}$$

Големината на тангенциалната сила, действаща на тялото, е $F_T = mg\sin\theta$ **[0.25 т.]**. Радиалната ѝ компонента е $F_R = -mg\sin\theta\cos\theta$, където сме отчели посоката на нарастване на радиалната координата r, а радиалното ускорение е $a_R = -g\sin\theta\cos\theta$ **[0.25 т.]**. Правим приближение за малък ъгъл и получаваме $a_R \approx -g\theta = -g2kr$ **[0.25 т.]**. Така получаваме

$a_R \equiv \frac{d^2r}{dt^2} = -2kgr$. **[1 т.]**

Знаем, че координатата r е от вида $r = A\cos(\omega t + \varphi_0)$. Заместваме r в горното диференциално уравнение: $\frac{d^2r}{dt^2} = -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 r = -2gkr$, следователно

$$\omega = \sqrt{2gk} \text{ и } T = 2\pi/\sqrt{2gk} \text{ .[1 т.]}$$

Енергетичен:

Механичната енергия на тялото е $E = \frac{mv^2}{2} + mgz$. За скоростта имаме $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ **[0.25 т.]**. Тъй като $dz = 2krdr$, имаме $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = \left(1+(2kr)^2\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(1+\tan^2\theta\right)\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \approx \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$

($\theta \approx 0$). **[0.25 т.]**

Така получаваме

$$E = \frac{m}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + mgkr^2 \text{. [0.25 т.]}$$

От закона за запазване на енергията имаме $\frac{dE}{dt} = 0$, откъдето $m\frac{dr}{dt}\frac{d^2r}{dt^2} + 2mgkr\frac{dr}{dt} = 0$ **[0.25 т.]**, т.е.

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -2gkr \text{. [1 т.]}$$

От това уравнение можем да намерим периода, както сме направили по-горе.

г) Точният израз за радиалното ускорение е $a_R = -g\sin\theta\cos\theta$, а периодът е получен с приблизителната формула $a_R \approx -g\theta$. Тъй като $g\sin\theta\cos\theta < g\theta$, точната формула за радиалното ускорение дава занижени стойности спрямо приблизителната. Следователно точният период е по-голям от пресметнатия. **[2 т.]**

Задача 2. Електричество

Част 1

а) Има две $+q, -q$ двойки, разделени на разстояние d, всяка от които има потенциална енергия

$$-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 d} \text{.[0.25 т.]}$$

Има две $+q, -q$ двойки, разделени на разстояние r, всяка от които има потенциална енергия

$$-\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r} \text{. [0.25 т.]}$$

Има една $+q,+q$ двойка и една $-q,-q$ двойка, разделени на разстояние $\sqrt{r^2+d^2}$, всяка от които има потенциална енергия

$$\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+d^2}}.\ \mathbf{[0.25\ т.]}$$

Последните два члена клонят към 0 с нарастване на r, докато първият член не зависи от r. За да приложим конвенцията за нулева потенциална енергия на безкрайност, запазваме само последните два члена:

$$\grave{U}=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{2}{r}+\frac{2}{\sqrt{r^2+d^2}}\right).\ \mathbf{[0.25\ т.]}$$

б) Имаме

$$U=\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+(d/r)^2}}-1\right).$$

Използваме биномиалното приближение $(1+x)^n\approx 1+nx$ за малки стойности на x. Получаваме

$$U\approx\frac{2q^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2-1\right)\approx-\frac{q^2d^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.\ \mathbf{[1\ т.]}$$

Изразено чрез диполния момент:

$$U\approx-\frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}.\ \mathbf{[1\ т.]}$$

в) От съображения за симетрия следва, че силата трябва да е насочена по оста, свързваща двата дипола. Тъй като потенциалната енергия нараства с нарастване на разстоянието, силата е на привличане. Големината е

$$F=-\frac{dU}{dr}=-\frac{3p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^4},\ \mathbf{[1\ т.]}$$

където знакът минус означава, че силата е на привличане. **[1 т.]**

Друго възможно решение е да се напише точен израз за силата и да се наложи биномиалното приближение, както по-горе.

г) Потенциалът в точка P е

$$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_+}-\frac{1}{R_-}\right)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{R_--R_+}{R_+R_-}\right),\ \mathbf{[0.5\ т.]}$$

където R_- и R_+ са разстоянията съответно до отрицателния и положителния заряд. При $d \ll R$ имаме $R_--R_+\approx d\cos\theta$ **[0.5 т.]** и $R_-R_+\approx R^2$ **[0.5 т.]**. Така получаваме

$$V\approx\frac{p\cos\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{R}}{4\pi\varepsilon_0 R^3}.\ \mathbf{[0.5\ т.]}$$

Част 2

д) По вътрешната повърхност ще се натрупа заряд $-Q$, а по външната ще се натрупа заряд $+Q$. От сферичната симетрия и от закона на Гаус следва, че електричното поле в обвивката е

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_0 - Q(t)}{r^2}. \text{ [0.5 т.]}$$

Това ще доведе до ток с плътност

$$J = \frac{E}{\rho} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\rho}\frac{q_0 - Q}{r^2}. \text{ [0.5 т.]}$$

Самият ток е с големина

$$I = JS = \frac{q_0 - Q}{\varepsilon_0\rho}. \text{ [0.5 т.]}$$

Тъй като $I = dQ/dt$, имаме

$$\frac{dQ}{q_0 - Q} = \frac{dt}{\varepsilon_0\rho}. \text{ [0.5 т.]}$$

Следователно

$$\int_0^{Q(t)} \frac{dQ}{q_0 - Q} = \int_0^t \frac{dt}{\varepsilon_0\rho}.$$

Така намираме

$$\frac{Q}{q_0} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\varepsilon_0\rho}\right). \text{ [1 т.]}$$

__Задача 3. Топлина__

Част 1

а) За мощността имаме $P = \sigma S T_S^4$. Така намираме

$$T_S = \left(\frac{P}{4\pi\sigma R^2}\right)^{1/4}. \text{ [1 т.]}$$

б) Разумно е да приемем, че температурата зависи единствено от разстоянието до центъра на планетата. За слой с дебелина dr температурната разлика е dT (без да отчитаме знака на dT). Имаме

$$k = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\frac{1}{4\pi r^2}\frac{dr}{dT}. \text{ [1 т.]}$$

Топлината, преминаваща през сферичния слой, зависи от мощността, излъчена от заградения обем (планетата е еднородна). Имаме

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = P\frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = P\frac{r^3}{R^3}, \text{ [1 т.]}$$

откъдето получаваме

$$dT = \frac{P}{4\pi k R^3} r dr \text{. [1 т.]}$$

Така намираме

$$\Delta T = \frac{P}{8\pi k R}\text{, [1 т.]}$$

откъдето можем да намерим и температурата в центъра на планетата.

Част 2

в) Снарядът ще се ускорява, докато налягането отляво е по-голямо от налягането отдясно. Следователно снарядът ще постигне максималната възможна кинетична енергия, ако цилиндърът е с такава дължина, че крайното налягане в затворения обем да е равно на P_{atm}.

Вътрешната енергия на идеален двуатомен газ е

$$U = \hat{C}_V nRT\text{, [0.5 т.]}$$

където $\hat{C}_V = 5/2$ е безразмерният специфичен топлинен капацитет при постоянен обем. Тъй като $PV = nRT$, намираме

$$U = \hat{C}_V PV\text{. [0.5 т.]}$$

Максималната кинетична енергия се достига, когато крайното налягане е равно на P_{atm}. Тогава работата, която извършва газът върху снаряда, е

$$A = \hat{C}_V (P_0 V_0 - P_{atm} V_f)\text{. [1 т.]}$$

Взимаме предвид това, че снарядът се движи във въздух, който оказва насрещно налягане P_{atm}. Така за кинетичната енергия получаваме

$$E_{max} = \hat{C}_V (P_0 V_0 - P_{atm} V_f) - P_{atm}(V_f - V_0)\text{. [0.5 т.]}$$

Газът се разширява адиабатно и затова

$$V_f = V_0 \left(\frac{P_0}{P_{atm}}\right)^{1/\gamma}\text{, [0.5 т.]} .$$

където $\gamma = C_p / C_V = 7/5$. Заместваме числените стойности:

$$E_{max} = \frac{5}{2} P_0 V_0 - \frac{7}{2} P_{atm} V_f + P_{atm} V_0,$$

т.е.

$$E_{max} = \left(\frac{5}{2} P_0 + P_{atm} - \frac{7}{2} P_{atm}{}^{2/7} P_0^{5/7}\right) V_0\text{. [1 т.]}$$

г) За дължината на оръдието директно получаваме

$$L = \frac{V_f}{S} = \frac{V_0}{S}\left(\frac{P_0}{P_{atm}}\right)^{5/7}\text{. [1 т.]}$$