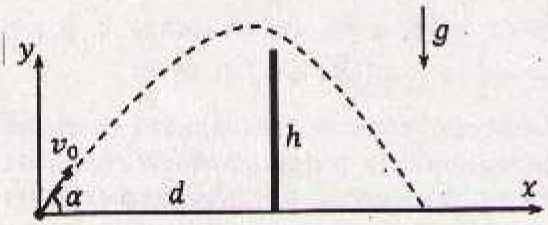
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
9 – 11 март 2018 г., Стара Загора
Решения на темата за 11.-12. клас (пета състезателна група)

Задача 1. Прехвърляне на стена



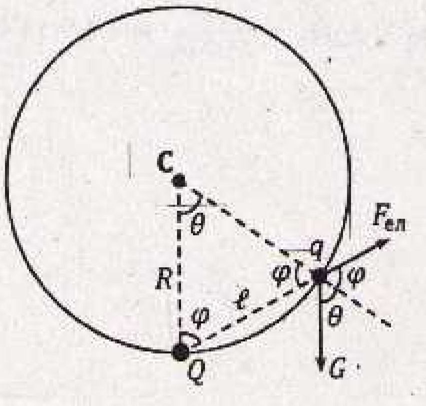
а) В координатната система на фигурата вляво законът за движение на снаряда е: $x(t) = v_0 \cos\alpha\, t$, $y(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$, където t е изминалото време от изстрелването на снаряда. **[1 т.]** Търсените разстояния се определят от траектории, които минават точно над ръба на стената, т.е. снарядът трябва да прелети през точката с координати (d, h). **[0,5 т.]** Това условие води до следните две уравнения: $v_0 \cos\alpha\, t = d$ и $v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2} = h$. **[0,5 т.]** Като изключим t от уравненията, получаваме уравнение за ъглите на изстрелване на снаряда, при които той минава точно над ръба: $d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} = d\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gd^2}{2v_0^2}(1 + \mathrm{tg}^2\alpha) = h$. **[1 т.]** Това е квадратно уравнение с корени $\mathrm{tg}\,\alpha_1 = \frac{v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - g(2hv_0^2 + gd^2)}}{gd}$, $\mathrm{tg}\,\alpha_2 = \frac{v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - g(2hv_0^2 + gd^2)}}{gd}$. **[1 т.]** По-големият корен съответства на $x_{\min}$, а по-малкият – на $x_{\max}$. Търсените разстояния се намират, като знаем общото време на полета $t_{\text{total}} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ и го заместим в $x(t)$,

откъдето $x_{\min} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha_1 \cos\alpha_1}{g} = \frac{2v_0^2\,\mathrm{tg}\,\alpha_1}{g(1+\mathrm{tg}^2\alpha_1)} = \frac{d\left[gd^2 + h\left(v_0^2 - \sqrt{v_0^4 - g(2hv_0^2 + gd^2)}\right)\right]}{g(d^2+h^2)} \approx 31$ m. **[1,5 т.]**

Аналогично $x_{\max} = \frac{2v_0^2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_2}{g} = \frac{2v_0^2\,\mathrm{tg}\,\alpha_2}{g(1+\mathrm{tg}^2\alpha_2)} = \frac{d\left[gd^2 + h\left(v_0^2 + \sqrt{v_0^4 - g(2hv_0^2 + gd^2)}\right)\right]}{g(d^2+h^2)} \approx 61$ m. **[1,5 т.]**

б) С увеличаване на разстоянието между оръдието и стената съответното $x_{\min}$ нараства, тъй като снарядите трябва да се изстрелват под по-малки ъгли спрямо хоризонта. От друга страна съответното $x_{\max}$ намалява, тъй като оръдието се отдалечава от стената. По този начин $x_{\min}$ и $x_{\max}$ клонят към една обща стойност, която съответства на търсеното $d_{\max}$. **[0,5 т.]** Тъй като $x_{\min}$ и $x_{\max}$ се определят от ъгъла на изстрелване, който се получава като решение на квадратно уравнение, горното условие е еквивалентно на съществуването на двоен корен на квадратното уравнение, т.е. дискриминантата на уравнението трябва да е равна на нула: $v_0^4 - g(2hv_0^2 + gd_{\max}^2) = 0$. **[0,5 т.]** Оттук $d_{\max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 - 2gh} \approx 41$ m. **[1 т.]** Съответното $\alpha_{d\max} = \mathrm{arctg}\left(\frac{v_0^2}{gd_{\max}}\right) = \mathrm{arctg}\left(v_0/\sqrt{v_0^2 - 2gh}\right) \approx 57°$. **[1 т.]**

Задача 2. Заряди върху окръжност

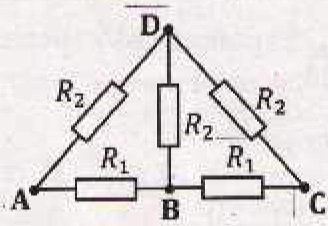


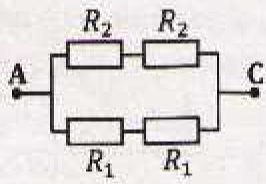
а) На топчето действа сила на тежестта $G = mg$, насочена вертикално надолу. **[0,5 т.]** Нека да означим разстоянието между зарядите с $\ell = 2R\sin(\theta/2)$. **[0,5 т.]** Електричната сила, която действа на топчето, има големина $F_{ел} = \frac{kqQ}{\ell^2} = \frac{kqQ}{4R^2\sin^2(\theta/2)}$ и посока, означена на фигурата вляво. **[0,5 т.]** За да бъде топчето в равновесие, трябва тангенциалните на окръжността компоненти на двете сили да са равни по големина: $G\sin\theta_{\text{eq}} = mg\sin\theta_{\text{eq}} = F_{\text{ел}}\sin\varphi_{\text{eq}} = \frac{kqQ\sin\varphi_{\text{eq}}}{4R^2\sin^2(\theta_{\text{eq}}/2)}$, където φ_{eq} е равновесната стойност на ъгъла φ, означен на чертежа по-горе. **[1 т.]** Центърът на окръжността и двата заряда образуват равнобедрен триъгълник, откъдето следва, че $\varphi = 90° - \frac{\theta}{2}$, а оттук $\sin\varphi = \cos(\theta/2)$. **[0,5 т.]** По този начин горното равенство на тангенциалните компоненти придобива следния вид: $\sin^3(\theta_{\text{eq}}/2) = \frac{kqQ}{8mgR^2}$. **[0,5 т.]** Окончателно $\theta_{\text{eq}} = 2\arcsin\left(\frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{kqQ}{mgR^2}}\right) = 60°$. **[1 т.]**

б) Търсената големина на силата на реакция от страна на окръжността е $N_{\text{eq}} = mg\cos\theta_{\text{eq}} + \frac{kqQ\cos\varphi_{\text{eq}}}{4R^2\sin^2(\theta_{\text{eq}}/2)} = mg\cos\theta_{\text{eq}} + \frac{kqQ}{4R^2\sin(\theta_{\text{eq}}/2)} = \frac{1}{2}\left(mg + \frac{kqQ}{R^2}\right) = 0{,}5\ \text{N}$. **[2 т.]**

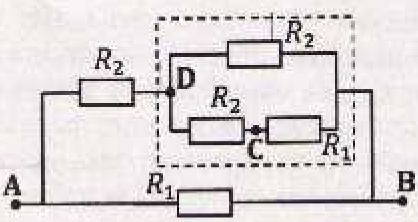
в) Нека да отчитаме височината на издигане на топчето спрямо най-долната точка от окръжността, т.е. $h = R(1-\cos\theta)$. **[0,5 т.]** Гравитационната потенциална енергия на топчето има големина $mgh = mgR(1-\cos\theta)$. **[0,5 т.]** Кулоновата потенциална енергия на топчето е $\frac{kqQ}{\ell} = \frac{kqQ}{2R\sin(\theta/2)}$. **[0,5 т.]** От закона за запазване на пълната механична енергия следва, че $2mgR + \frac{kqQ}{2R} = \frac{mv_{\text{eq}}^2}{2} + mgR(1-\cos\theta_{\text{eq}}) + \frac{kqQ}{2R\sin(\theta_{\text{eq}}/2)} = \frac{mv_{\text{eq}}^2}{2} + \frac{mgR}{2} + \frac{kqQ}{R}$, откъдето $v_{\text{eq}} = \sqrt{3gR - \frac{kqQ}{mR}} \approx 7{,}7\ \text{m/s}$. **[2 т.]**

Задача 3. Електрическа верига





а) Дадената електрическа верига е симетрична спрямо отсечката **BD** и при подаване на напрежение между точките **A** и **C** няма да има напрежение между **B** и **D**. **[0,5 т.]** В такъв случай няма да протече ток през средния резистор (балансиран Уитстонов мост) и той може да бъде откачен от веригата. Получава се еквивалентната схема, показана на фигурата по-горе вдясно. **[1 т.]** Съпротивлението, което ще се измери между точките **A** и **C**, е равно на $R_{\text{AC}} = \frac{2R_1R_2}{R_1+R_2} = 1{,}5\ \text{k}\Omega$. **[1 т.]**



б) В този случай веригата може да се представи като система от последователно и успоредно свързани резистори с еквивалентна схема, която е показана на фигурата вляво. **[2 т.]** Търсеното съпротивление е $R_{\text{AB}} = \frac{R_1\left(R_2 + \frac{R_2(R_1+R_2)}{R_1+2R_2}\right)}{R_1+R_2+\frac{R_2(R_1+R_2)}{R_1+2R_2}} = \frac{R_1R_2(2R_1+3R_2)}{(R_1+R_2)(R_1+3R_2)} \approx 0{,}83\ \text{k}\Omega$. **[2 т.]**

в) За да определим напрежението между точките **C** и **D**, трябва да намерим тока, който протича между двете точки. **[0,5 т.]** Общият ток, който протича през частта от веригата, оградена с пунктирана линия, е $I = \mathcal{E}\Big/\left(R_2 + \frac{R_2(R_1+R_2)}{R_1+2R_2}\right)$. **[1 т.]** Търсеният ток $I_{\text{CD}} = \frac{IR_2}{R_1+2R_2} = \frac{\mathcal{E}}{2R_1+3R_2}$. **[1 т.]** Окончателно получаваме $U_{\text{CD}} = I_{\text{CD}}R_2 = \frac{\mathcal{E}R_2}{2R_1+3R_2} \approx 1{,}6\ \text{V}$. **[1 т.]**