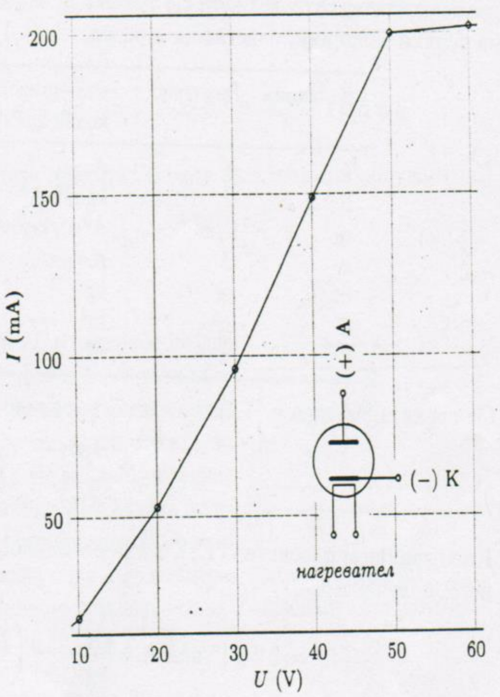
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
9–11 март 2018 г., гр. Стара Загора
Тема за 10. клас, четвърта състезателна група
Решения и указания

Задача 1. Ламповите диоди са електронни компоненти, наподобяващи газоразрядна лампа с два електрода – анод и катод. Принципът на работа на ламповия диод е следният: с помощта на нагревател катодът (К) се нагрява до температура, при която от него започват да се отделят електрони, които формират електронен облак. Когато на анода (А) се подаде положително напрежение U спрямо катода, електроните се привличат от анода и през диода протича ток I. Волт–амперната характеристика както и схематично представяне на такъв диод са показани на Фигура 1. За малки напрежения зависимостта на тока от напрежението се дава с израза:

$$I = bU^n, \qquad (1.1)$$



Фигура 1

където b е константа, която зависи от размерите на диода. Над определена стойност на напрежението токът нараства много бавно, и горната зависимост не е изпълнена. Ако електродите са плоски пластини с площ S, а разстоянието между тях е d, тогава константата b може да се изрази като:

$$b = \frac{4}{9} \frac{\varepsilon_0 S}{d^2} \sqrt{\frac{2e}{m}}, \qquad (1.2)$$

където $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m е диелектричната проницаемост на вакуума, а $e = 1{,}60.10^{-19}$ C и $m = 9{,}11.10^{-31}$ kg са зарядът и масата на електрона.

1.1. Определете степенния показател n, участващ в зависимост (1.1), като използвате метода на размерностите. За по-голяма прегледност направете таблица, в която запишете размерностите на всички необходими величини, изразени чрез основните мерни единици в SI. **(5 т.)**

1.2. Използвайте резултата, получен в **1.1.**, и волт–амперната характеристика на Фигура 1, за да определите числената стойност на константата b. **(2 т.)** Ако площта на електродите е $S = 10\ \mathrm{cm}^2$, оценете времето на полет τ на електроните при напрежение $U = 11{,}4$ V. Приемете, че началната скорост на електроните е пренебрежимо малка. **(3 т.)**

Решение: 1.1. При определяне на степенния показател n използваме метода на размерностите, като за целта ще трябва да направим таблица с мерните единици на всички величини, участващи в равенства (1.1) и (1.2):

Величина	Размерност	Размерност чрез основни единици в SI
I	A	A
U	V	$\mathrm{kg.m^2/A^3}$
ε_0	F/m	$\mathrm{A^2.s^4/kg.m^3}$
e	C	A.s
m	kg	kg
S	$\mathrm{m^2}$	$\mathrm{m^2}$
d	m	m

(1,5 т.)

От горната таблица и (1.2) се вижда, че размерността на константата b е:

$$[b] = \frac{\mathrm{A^{5/2}s^{9/2}}}{\mathrm{kg^{3/2}m^3}}. \qquad \mathbf{(1\ т.)}$$

Като запишем равенство (1.1), но за размерностите на величините, участващи в него, получаваме:

$$[I] = [b][U]^n \text{ или } \mathrm{A} = \frac{\mathrm{A^{5/2}s^{9/2}}}{\mathrm{kg^{3/2}m^3}}\left(\frac{\mathrm{kg.m^2}}{\mathrm{A.s^3}}\right)^n. \qquad \mathbf{(1{,}5\ т.)}$$

За да бъде изпълнено последното равенство, степенните показатели на еднаквите величини от двете страни на равенството трябва да са равни, откъдето може лесно да видим, че $n = 3/2$ и (1.1) се записва като:

$$I = bU^{3/2}. \qquad \mathbf{(1\ т.)}$$

Решение: 1.2. След като сме определили, че $n = 3/2$, може да използваме Фигура 1, откъдето може да пресметнем b за няколко точки (поне три) от графиката. За средната стойност на константата получаваме $b = 0{,}58\ \mathrm{mA.V^{-3/2}}$. **(1 т.)**

U [V]	I [mA]	b [$\mathrm{mA.V^{-3/2}}$]
20	52	0,58
30	96	0,58
40	148	0,59

(1 т.)

За да определим времето на полет на електроните, трябва да знаем разстоянието d между електродите. То може да се намери от (1.2) и числената стойност на b, получена по-горе:

$$b = \frac{4}{9}\frac{\varepsilon_0 S}{d^2}\sqrt{\frac{2e}{m}} = 2{,}33.10^{-6}\frac{S}{d^2} = 0{,}58.10^{-3},$$

откъдето получаваме, че $d^2 \approx 4{,}00$ mm^2 или $d = 2{,}00$ mm. **(0,5 т.)** Началната скорост на електроните е пренебрежимо малка, а при фиксирано напрежение те се движат с постоянно ускорение, така че може да изразим времето на полет τ:

$$\tau = 2d/v_{\max}, \qquad \textbf{(0,5 т.)}$$

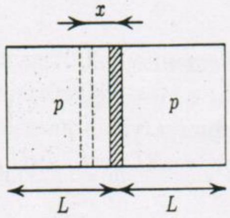
където $v_{\max}$ се определя от закона за запазване на енергията при зададеното напрежение $U = 11{,}4$ V:

$$\frac{mv_{\max}^2}{2} = eU, \text{ откъдето } v_{\max} = \sqrt{2eU/m} \approx 2{,}00.10^6 \text{ m/s}. \qquad \textbf{(1,5 т.)}$$

Така за времето, за което електроните прелитат между електродите, получаваме: $\tau = 2{,}00.10^{-9}$ s $= 2{,}00$ ns. **(0,5 т.)**

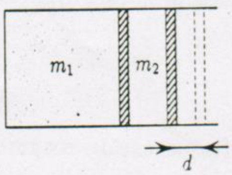
Задача 2.

2.1. Затворен цилиндър с дължина $2L$ е разделен на две равни части от подвижно бутало с площ S. В началния момент двете половини на цилиндъра са запълнени с различни газове, така че налягането p от двете страни на буталото е еднакво (виж Фигура 2.1). На какво разстояние x ще се премести буталото, ако само газът от лявата половина може свободно да преминава през буталото? Силата на триене между буталото и стените на съда е F, температурата и на двата газа остава постоянна през цялото време. Разгледайте възможните случаи в зависимост от големината на силата F. **(5 т.)**



Фигура 2.1

2.2. Цилиндър е разделен на две части от две подвижни бутала, както е показано на Фигура 2.2. Всяка от двете части е запълнена с един и същ газ, като отношението на масите на газа от лявата и дясната части е $\dfrac{m_1}{m_2} = 3$. В началния момент буталата са неподвижни и температурата на газа в двете части е една и съща. Дясното бутало се премества на разстояние d, след което буталата отново са неподвижни и температурата на газа в двете части е една и съща. На какво разстояние x ще се е преместило лявото бутало? Триенето между буталата и стените на цилиндъра се пренебрегва. **(5 т.)**



Фигура 2.2

Масите и дебелините на буталата са пренебрежимо малки и в двете части на задачата.

Упътване: връзката между налягането p, обема V и абсолютната температура T, на n мола идеален газ се дава с така нареченото *уравнение на състоянието на идеален газ*: $pV = nRT$, където $R = 8{,}314$ J/mol K е универсалната газова константа.

Решение: 2.1. Нека условно да наречем газа, който се намира в лявата част на цилиндъра – газ А, а този в дясната част – газ Б. Тъй като газ А може да преминава свободно през буталото, то той ще изпълни целия цилиндър, като налягането му от двете страни на буталото ще е едно и също. (**1 т.**) Тогава налягането от дясната страна на буталото ще е по-голямо. Нека вследствие на тази разлика в наляганията буталото се е преместило наляво на разстояние x. Условието за равновесие на буталото ще е:

$$p'S = F, \quad \textbf{(1 т.)}$$

където p' е налягането на газ Б и се определя от условието $T = \text{const}$:

$$pV = \text{const} \Rightarrow pLS = p'(L + x)S. \qquad \textbf{(1 т.)}$$

От последните две уравнения, за преместването x получаваме:

$$x = \begin{cases} 0, & \text{ако } F \geq pS; \\ (pS/F - 1)\,L, & \text{ако } pS/2 < F < pS; \\ L, & \text{ако } F \leq pS/2. \end{cases} \qquad \textbf{(2 т.)}$$

Решение: 2.2. Нека преди буталото да бъде преместено, обемът на газа с маса m_1 е $V_1 = Sl_1$, съответно този на газа с маса m_2 е $V_2 = Sl_2$. Като отчетем, че температурата на двата газа е една и съща, както и налягането им, (**1 т.**) и $pV = nRT = (m/\mu)RT$, то може да получим:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2}. \qquad \textbf{(1 т.)}$$

Подобно съотношение ще е изпълнено и след като дясното бутало се премести на разстояние d, а лявото на разстояние x, защото налягането и температурата на газа от двете страни на лявото бутало отново са равни (**1 т.**):

$$\frac{V_1'}{V_2'} = \frac{l_1 + x}{l_2 + d - x} = \frac{m_1}{m_2}. \qquad \textbf{(1 т.)}$$

Приравняваме горните две равенства и получаваме:

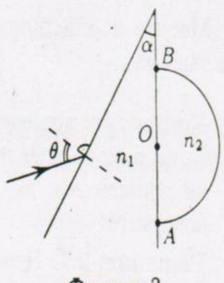
$$\frac{l_1}{l_2} = \frac{l_1 + x}{l_2 + d - x},$$

откъдето за преместването x се получава $x = \dfrac{3}{4}d$. (**1 т.**)

Задача 3. Плътен полуцилиндър с радиус R е долепен до призма с ъгъл на пречупване α, както е показано на Фигура 3. Показателят на пречупване на призмата n_1 и този на полуцилиндъра n_2 зависят от дължината на вълната λ по следния начин:

$$n_i = a_i + \frac{b_i}{\lambda^2}, \; i = 1, 2,$$

където $a_1 = 1{,}3$, $b_1 = 5.10^4\ \text{nm}^2$, $a_2 = 1{,}1$ и $b_2 = 1.10^5\ \text{nm}^2$.



Фигура 3

3.1. Определете дължината на вълната λ_0, при която няма да се наблюдава пречупване на светлината на границата AB, без значение от ъгъла на падане θ. **(1,5 т.)** Пресметнете показателите на пречупване n_i за тази дължина на вълната. **(0,5 т.)**

3.2. Опишете (кратко и ясно) или направете чертеж (с нужните означения), който да показва хода на лъч светлина с дължина на вълната λ_0, отместващ се на най-малък ъгъл δ от първоначалната си посока на разпространение. **(1,5 т.)**

3.3. За тази част от задачата приемете, че показателите на пречупване не зависят от дължината на вълната и имат следните стойности: $n_1 = \sqrt{2}$ и $n_2 = 2$. Разгледайте успореден сноп лъчи, падащи върху призмата под ъгъл $\theta = 0°$. Ако $\alpha = 45°$, определете централния ъгъл φ (спрямо т. O) „ограничаващ" частта от цилиндъра, от която ще излизат лъчите. **(6,5 т.)**

Решение: 3.1. За да не се наблюдава пречупване на светлината на границата AB, без значение от ъгъла на падане, трябва показателите на пречупване от двете страни на AB да бъдат еднакви:

$$a_1 + \frac{b_1}{\lambda_0^2} = a_2 + \frac{b_2}{\lambda_0^2}, \text{ откъдето } \lambda_0 = \sqrt{\frac{b_2 - b_1}{a_1 - a_2}} = 500 \text{ nm}. \qquad \textbf{(1,5 т.)}$$

След като сме определили λ_0, може да пресметнем и показателя на пречупване $n_1 = n_2 = n_0 = 1{,}5$. **(0,5 т.)**

Решение: 3.2. За $\lambda = \lambda_0$ най-малко отклонение от първоначалната си посока на разпространение ще има лъч, падащ нормално към повърхността на призмата ($\theta = 0°$) и минаващ през точка O. За този лъч ъгъла на отклонение ще бъде $\delta = 0°$. **(1,5 т.)**

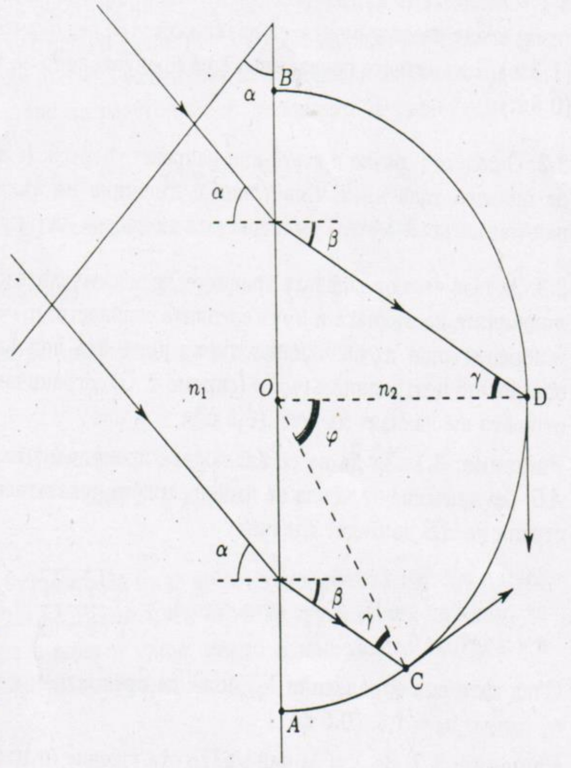
Решение: 3.3. При ъгли $\theta = 0°$ и $\alpha = 45°$ няма да се наблюдава пречупване на светлината на границата *въздух–призма* и лъчите ще падат под ъгъл $\alpha = 45°$ на границата AB. **(1,5 т.)** От закона на Снелиус може да определим ъгъла на пречупване β (виж Фигура 3.3):

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta;$$

$$\sin\beta = 1/2, \beta = 30°. \textbf{(2 т.)}$$

При преминаване на светлината от оптически по-плътна, към оптически порядка среда може да се наблюдава пълно вътрешно отражение, като за границата *полуцилиндър–въздух* граничният ъгъл γ се определя от условието:

$$\sin\gamma \leq \frac{1}{n_2},$$



Фигура 3.3

откъдето определяме, че $\gamma = 30°$. **(1,5 т.)** Може да се покаже, че $\angle AOC = 30°$ и $\angle DOB = 90°$, тогава лесно се вижда, че търсеният ъгъл е $\varphi = 60°$. **(1,5 т.)**