МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
11 – 12 март 2017 г., Вършец
Специална тема, Решения и указания

Задача 1. Спътник.

а) Разглеждаме условието за равновесие на много тънък сферичен слой от атмосферата, който се намира на височина h над морското равнище: $dp = -\frac{GM_З\rho(h)dh}{(R_З+h)^2} = -\frac{gR_З^2\rho(h)dh}{(R_З+h)^2}$, **[0,5 т.]** като минусовият знак отчита спадането на налягането с нарастване на височината. Използваме закона на Клапейрон–Менделеев за 1 mol въздушни молекули: $pV = RT \Longrightarrow p = nRT = \frac{\rho RT}{\mu}$, **[0,5 т.]** където сме използвали също така, че моларната концентрация на въздушните молекули е $n = \frac{1\ \mathrm{mol}}{V} = \frac{m_{\text{в}}}{\mu V} = \frac{\rho}{\mu}$. Така се получава, че $\frac{dp}{p} = -\frac{\mu g R_З^2 dh}{RT(R_З+h)^2}$. Интегрираме двете страни и намираме, че $\ln(p) = \frac{\mu g R_З^2}{RT(R_З+h)} + \mathrm{const}$. **[0,5 т.]** За да определим интеграционната константа, използваме, че $p(0) = p_0$, откъдето $\ln(p_0) = \frac{\mu g R_З}{RT} + \mathrm{const} \Longrightarrow \ln\left(\frac{p}{p_0}\right) = -\frac{\mu g R_З h}{RT(R_З+h)}$. **[0,5 т.]** Оттук $p(h) = p_0 \exp\left(-\frac{\mu g R_З h}{RT(R_З+h)}\right)$. **[0,5 т.]**

б) Използваме, че $[F_{\text{съпр}}] = \mathrm{N} = \mathrm{kg.m.s^{-2}} = [\rho^a S^b v^c] = \mathrm{kg}^a.\mathrm{m}^{-3a}.\mathrm{m}^{2b}.\mathrm{m}^c.\mathrm{s}^{-c}$. **[0,3 т.]** Получаваме три уравнения за трите неизвестни степени: $a = 1$, $-3a + 2b + c = 1$ и $-c = -2$. **[0,3 т.]** Следователно $a = 1, b = 1, c = 2$. **[0,4 т.]**

в) Използваме, че в случая гравитационната сила изпълнява ролята на центростремителна сила при движението на спътника по окръжност: $\frac{GmM_З}{r^2} = \frac{mgR_З^2}{r^2} = m\omega^2 r$, **[0,3 т.]** откъдето $\tau = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi(R_З+H)}{R_З}\sqrt{\frac{R_З+H}{g}} = 88\ \mathrm{min}$. **[0,5 т.]**

г) Мощността на сила $\vec{F}$ е $P = \vec{F}.\vec{v}$. **[0,2 т.]** В случая имаме сила на съпротивление с големина $F_{\text{съпр}} = k\rho S v^2$ и посока, обратна на посоката на скоростта на спътника, така че $P = -k\rho S v^3 = -\frac{k\pi\mu p(H)R_C^2 R_З^3}{RT}\left(\frac{g}{R_З+H}\right)^{\frac{3}{2}} = -27\ \mathrm{W}$. **[0,5 т.]**

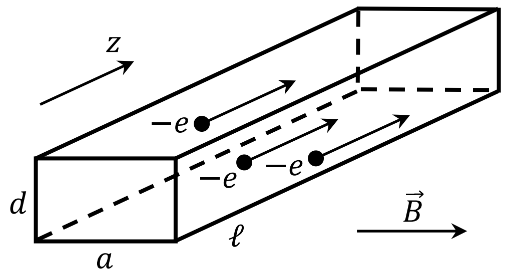
д) Пълната механична енергия $E = \frac{mv^2}{2} - \frac{GmM_З}{r} = \frac{mv^2}{2} - mv^2 = -\frac{mv^2}{2}$. **[0,3 т.]** Диференцираме по времето: $\dot{E} = -mv\dot{v} = P = -k\rho S v^3$, **[0,5 т.]** откъдето $\dot{v} = \frac{k\rho S v^2}{m} = \frac{k\pi\mu p(H) g R_C^2 R_З^2}{mRT(R_З+H)} = 3{,}4.10^{-5}\ \mathrm{m/s^2}$. **[0,5 т.]** Знакът на $\dot{v}$ е положителен, така че големината на скоростта *расте*. **[0,2 т.]**

е) Ъгловото ускорение е $\varepsilon = \dot{\omega}$. За да го намерим, ще използваме полученото в подточка в): $\omega^2 r^3 = \mathrm{const}$ (алтернативно може да се използва третия закон на Кеплер, който дава същото съотношение; още едно възможно решение се получава, като се разгледа уравнението за промяната на момента на импулса вследствие на силата на съпротивление). **[0,5 т.]** Логаритмуваме равенството и след това диференцираме по времето, което води до: $\frac{2\dot{\omega}}{\omega} + \frac{3\dot{r}}{r} = 0$. **[0,5 т.]** Спътникът извършва приблизително равномерно движение по окръжност, откъдето $v = \omega r$, **[0,3 т.]** така че $\dot{v} = \dot{\omega} r + \omega \dot{r} =$

$\frac{k\rho S v^2}{m}$. **[0,5 т.]** Като използваме от по-горе, че $\dot{r} = -\frac{2r\dot{\omega}}{3\omega}$, получаваме: $\frac{\dot{\omega}r}{3} = \frac{k\rho S v^2}{m}$, **[0,2 т.]** т.е. $\varepsilon = \frac{3k\rho S v^2}{mr} = \frac{3k\pi\mu p(H) g R_C^2 R_3^2}{mRT(R_3+H)^2} = 1{,}6.10^{-11}$ rad/s^2. **[0,5 т.]**

ж) Тъй като спътникът пада към повърхността на Земята сравнително бавно, $\Delta h \approx \dot{r}\tau$, **[0,5 т.]** откъдето $\Delta h \approx -\frac{4\pi r\varepsilon}{3\omega^2} = -\frac{4k\pi^2\mu p(H) R_C^2 (R_3+H)^2}{mRT} = -305$ m. **[0,5 т.]**

<u>Задача 2</u>. Модел на Друде, закон на Ом и ефект на Хол.



а) Уравнението на Нютон за движението на електроните по дължината на проводника е: $m_e\ddot{z} = eE - \gamma\dot{z}$, **[1 т.]** където m_e е масата на електрона, а $E = U/\ell$ **[0,5 т.]** е големината на електричното поле, което се създава от напрежението между краищата на проводника. След затварянето на веригата скоростта на електроните расте, докато големините на електростатичната сила и силата на съпротивление се изравнят. **[0,5 т.]** При това положение големината на дрейфовата скорост на електроните става $v_\mathrm{d} = \frac{eE}{\gamma} = \frac{eU}{\gamma\ell}$. **[0,5 т.]**

б) Големината на тока през проводника е $I = \frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{e\Delta N}{\Delta t}$, **[0,5 т.]** където Δq е зарядът, който преминава през напречното сечение на проводника, а ΔN е съответният брой електрони. Използваме, че моларната концентрация на електроните е $n = \frac{N}{N_\mathrm{A}V} = \frac{m}{\mu V} = \frac{\rho}{\mu}$. **[0,5 т.]** Следователно $I = \frac{enN_\mathrm{A}\Delta V}{\Delta t} = \frac{eN_\mathrm{A}\rho ad\Delta z}{\mu\Delta t} = \frac{eN_\mathrm{A}\rho adv_\mathrm{d}}{\mu} = \frac{e^2N_\mathrm{A}\rho adU}{\mu\gamma\ell}$. **[1,5 т.]** Съпротивлението $R = \frac{U}{I} = \frac{\mu\gamma\ell}{e^2N_\mathrm{A}\rho ad}$. **[0,5 т.]**

в) Като се използва израза за магнитната сила $\vec{F}_B = -e\vec{v}_\mathrm{d} \times \vec{B}$, **[0,5 т.]** която действа на електроните, и правилото на дясната ръка за намиране на посоката на векторното произведение, може да се съобрази, че на горната стена на проводника се натрупват електрони, т.е. върху *долната* стена остава некомпенсиран положителен заряд. **[0,5 т.]** Преразпределението на заряди продължава, докато възникналата при това електростатична сила не уравновеси магнитната сила: $eE_\mathrm{H} = ev_\mathrm{d}B$. **[1 т.]** Оттук $U_\mathrm{H} = E_\mathrm{H}d = dv_\mathrm{d}B = \frac{edBU}{\gamma\ell}$. **[0,5 т.]**

г) Общият заряд е като заряда на плосък кондензатор във вакуум, който е с напрежение между клемите U_H, **[1 т.]** т.е. зарядът е $Q = \frac{\varepsilon_0 a\ell U_\mathrm{H}}{d} = \frac{\varepsilon_0 aeBU}{\gamma}$. **[1 т.]**

<u>Задача 3</u>. Физика на XX век.

Част I Релативистката енергия на първоначално движещия се протон е $E = E_\text{к} + m_pc^2 = \sqrt{p_0^2c^2 + m_p^2c^4}$ (3.1), **[0,5 т.]** където p_0 е релативисткият импулс на протона. Законът за запазване на релативистката енергия на системата преди и след удара е: $E_\text{к} + 2m_pc^2 = \sqrt{p_1^2c^2 + m_p^2c^4} + \sqrt{p_2^2c^2 + m_p^2c^4}$ (3.2), **[0,5 т.]** където с p_1 и p_2 сме означили големините на релативистките импулси на протоните след удара. След взаимодействието помежду си протоните се движат симетрично спрямо посоката на движение на първоначално движещия се протон и съответно импулсите им сключват един и същ ъгъл $\theta/2$ с посоката на движение на налитащия протон. От закона за запазване на релативисткия импулс следва, че $p_1\sin(\theta/2) = p_2\sin(\theta/2)$, т.е. $p_1 = p_2 = p$, тъй като системата не притежава импулс перпендикулярно на посоката на движение на първоначално движещия се протон. **[0,4 т.]** По посоката на движение имаме, че $p_0 = p_1\cos(\theta/2) + p_2\cos(\theta/2) = 2p\cos(\theta/2)$. **[0,4 т.]** Оттук, като се използват и уравнения (3.1) и (3.2), следва, че $\cos(\theta/2) = \frac{p_0}{2p} = \sqrt{\frac{1+2m_pc^2/E_\text{к}}{1+4m_pc^2/E_\text{к}}} = 0,77$. **[1 т.]** Т.е. търсеният ъгъл е $\theta = 78°$. **[0,2 т.]**

Част II а) Пълната механична енергия на електроните е $E = \frac{p_1^2}{2m_e} + \frac{p_2^2}{2m_e} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0|\vec{r}_1-\vec{r}_2|}$, **[0,5 т.]** където с p_1 и p_2 сме означили големините на импулсите на електроните, а $\vec{r}_1$ и $\vec{r}_2$ са радиус-векторите на електроните в отправна система, свързана с ядрото на хелия. Разстоянието между двата електрона $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2\cos\alpha}$, където α е ъгълът, който сключват помежду си двата радиус-вектора на електроните. Тъй като се интересуваме от характеристиките на системата в основното състояние, искаме пълната механична енергия да е минимална, което означава, че разстоянието $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$ трябва да е максимално. **[0,3 т.]** Това се реализира при ъгъл $\alpha = \pi$, когато $|\vec{r}_1 - \vec{r}_2| = r_1 + r_2$. **[0,3 т.]** От принципа за неопределеност следва, че импулсите на електроните са $p_{1,2} \approx \frac{\hbar}{r_{1,2}} = \frac{h}{2\pi r_{1,2}}$. **[0,2 т.]** Енергията придобива вида: $E \approx \frac{h^2}{8\pi^2 m_e r_1^2} + \frac{h^2}{8\pi^2 m_e r_2^2} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_1} - \frac{Ze^2}{4\pi\varepsilon_0 r_2} + \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0(r_1+r_2)}$. **[0,2 т.]** Изразът за енергията е инвариантен при размяна на r_1 и r_2, което означава, че енергията се минимизира при $r_1 = r_2 = r$. **[0,3 т.]** Така $E \approx \frac{h^2}{4\pi^2 m_e r^2} - \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} = 2\left[\frac{h^2}{8\pi^2 m_e r^2} - \left(Z - \frac{1}{4}\right)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]$, **[0,2 т.]** т.е. енергията е равна на удвоената енергия на атом с един електрон около ядро с ефективен заряд $\left(Z - \frac{1}{4}\right)e = \frac{7e}{4}$. Хелиевият атом е в основно състояние при минимум на енергията, така че разстоянието на електроните до ядрото следва от уравнението: $E'(r_0) = -\frac{h^2}{2\pi^2 m_e r_0^3} + \left(Z - \frac{1}{4}\right)\frac{e^2}{2\pi\varepsilon_0 r_0^2} = 0$. **[0,5 т.]** Т.е. $r_0 \approx \frac{\varepsilon_0 h^2}{\left(Z-\frac{1}{4}\right)\pi e^2 m_e} = 3{,}0.\,10^{-11}$ m. **[0,5 т.]**

б) Енергията на хелиевият атом в основно състояние е $E_0 = E(r_0) \approx 2\left[\frac{h^2}{8\pi^2 m_e r_0^2} - \left(Z - \frac{1}{4}\right)\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0}\right] = -\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{e^4 m_e}{4\varepsilon_0^2 h^2} = -1{,}3.\,10^{-17}$ J $= -\,83$ eV. **[1 т.]**

в) При еднократна йонизация хелиевият атом става водородоподобен със заряд на ядрото $Ze = 2e$, което ни позволява да използваме вече получения резултат в подточка а), след като в него заместим $Z - \frac{1}{4}$ със Z, за да намерим търсеното разстояние: $r_0^* = \frac{\varepsilon_0 h^2}{Z\pi e^2 m_e} = 2{,}6.\,10^{-11}$ m. **[1 т.]**

г) След еднократна йонизация на хелиевия атом неговата енергия става равна на половината от израза за енергията, получен в подточка б), след като в него сме заместили $Z - \frac{1}{4}$ със Z: $E_0^* = -\frac{Z^2 e^4 m_e}{8\varepsilon_0^2 h^2}$. **[0,5 т.]** Търсената минимална енергия за йонизация на атома е $E_i^{(1)} = E_0^* - E_0 = \frac{e^4 m_e}{4\varepsilon_0^2 h^2}\left[\left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{Z^2}{2}\right] = 4{,}6.\,10^{-18}$ J $= 29$ eV. **[1 т.]**

д) След двукратна йонизация хелиевият атом е напълно дисоцииран и съответно системата има неотрицателна пълна механична енергия. Следователно търсената минимална енергия за двукратна йонизация е $E_i^{(2)} = -E_0 = \left(Z - \frac{1}{4}\right)^2 \frac{e^4 m_e}{4\varepsilon_0^2 h^2} = 83$ eV. **[0,5 т.]**