

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Бургас, 12 март 2016 г.
Примерни решения на специалната тема

Задача 1. Механика на бадминтона

А) *Помощни съотношения.*

Разглеждаме момента 1 като начален и записваме уравненията за скоростта и преместването при равноускорително движение в моментите 2 и 3.

$$\begin{aligned}\vec{v}_2 &= \vec{v}_1 + \vec{a}\Delta t \\ \vec{v}_3 &= \vec{v}_1 + \vec{a}(2\Delta t) \\ \vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + \vec{v}_1\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}\Delta t^2 \\ \vec{r}_3 &= \vec{r}_1 + \vec{v}_1(2\Delta t) + \frac{1}{2}\vec{a}(2\Delta t)^2\end{aligned}$$

От четирите уравнения намираме:

$$\begin{aligned}\vec{v}_1 &= \frac{4\vec{r}_2 - 3\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{2\Delta t}; \quad \vec{v}_2 = \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{2\Delta t}; \quad \vec{v}_3 = \frac{\vec{r}_1 + 3\vec{r}_3 - 4\vec{r}_2}{2\Delta t} \\ \vec{a} &= \frac{\vec{r}_1 - 2\vec{r}_2 + \vec{r}_3}{\Delta t^2}\end{aligned}$$

Б) Получените формули дават най-точна оценка за скоростта и за ускорението в средния (втория) момент.

В) За определяне на ускорението и скоростта в даден момент i , използваме координатите на перото в същия момент, както и в предходния ($i-1$), и в следващия ($i+1$) момент. За компонентите на скоростта имаме:

$$v_{xi} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t}; \quad v_{yi} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t}$$

а за компонентите на ускорението съответно:

$$a_{xi} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2}; \quad a_{yi} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta t^2}$$

Така пресметнатите стойности са дадени в таблицата.

№	t (s)	x (m)	y (m)	v_x (m/s)	v_y (m/s)	a_x (m/s ²)	a_y (m/s ²)	v (m/s)	vv_x (m ² /s ²)	vv_y (m ² /s ²)
1	0.0	0.0	0.0							
2	0.2	3.3	2.4	12.2	8.3	-43.9	-39.1	14.8	180.4	123.0
3	0.4	4.9	3.3	6.7	2.8	-10.8	-15.8	7.3	49.4	20.7
4	0.6	6.0	3.6	5.0	0.3	-6.6	-9.8	5.0	25.1	1.4
5	0.8	6.9	3.4	3.9	-1.5	-4.1	-7.6	4.2	16.5	-6.2
6	1.0	7.6	3.0	3.0	-2.9	-4.8	-6.9	4.2	12.8	-12.3
7	1.2	8.1	2.3	2.2	-4.1	-3.5	-5.1	4.7	10.4	-19.3
8	1.4	8.5	1.3	1.7	-4.9	-1.2	-2.5	5.2	9.0	-25.3
9	1.6	8.8	0.3							

Г) От II принцип на Нютон имаме:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - \frac{1}{2}C_D\rho S^2v^2\vec{n}$$

където $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ е големината на скоростта, а $\vec{n}$ е единичен вектор в посока на скоростта. Ако проектираме векторното равенство по двете координатни оси, получаваме:

$$a_x = -\frac{C_D\rho S^2}{2m}vv_x$$

$$a_y = -g - \frac{C_D\rho S^2}{2m}vv_y$$

Следователно, ако изберем като нови променливи vv_x и a_x , ще получим права пропорционалност с наклон $k = -\frac{C_D\rho S}{2m}$, от който можем да определим коефициента C_D . Пресметнатите стойности на големината на скоростта v и на новата променлива vv_x са дадени в таблицата.

На графиката са нанесени точките, съответстващи на променливите vv_x и a_x , както е построена и апроксимиращата права, минаваща през тях. За наклона на правата намираме:

$$k = \frac{\Delta a_x}{\Delta(vv_x)} = \frac{-49 \text{ m/s}^2}{200 \text{ m}^2/\text{s}^2} = -0.25(\pm 0.02) \text{ m}^{-1}$$

Плътноста на въздуха определяме от уравнението на Клапейрон-Менделеев:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = 1.17 \text{ kg/m}^3$$

Площта на сечението, перпендикулярно на скоростта, е:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = 26.4 \text{ cm}^2 = 2.64 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Следователно за коефициента на челно съпротивление намираме:

$$C_D = -\frac{2mk}{\rho S} \approx 0.78$$

Относителната грешка на резултата е $\frac{\Delta C_D}{C_D} = \frac{\Delta k}{k} = 0.08$. Окончателно получаваме:

$$C_D = 0.78 \pm 0.06$$

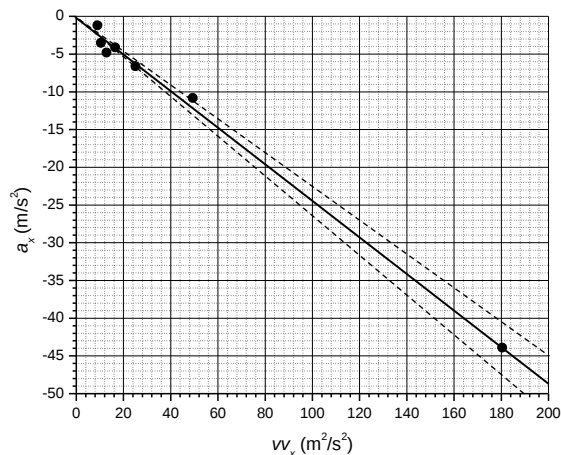
Задача 2. Гравитационна вълна

А) Приемаме, че f е степенна функция, т.е.

$$I \propto \omega^x \gamma^y c^z h^2$$

където x , y и z са неизвестни степни показатели. Размерностите на величините в двете страни на уравнението са:

$$[I] = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}; [\omega] = \text{s}^{-1}; [\gamma] = \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^3; [c] = \text{s}^{-1} \cdot \text{m}$$



От равенството на размерностите в двете страни на уравнението получаваме:

$$\text{kg} \cdot \text{s}^{-3} = \text{kg}^{-y} \cdot \text{s}^{-x-2y-z} \cdot \text{m}^{3y+z}$$

откъдето намираме $x = 2$; $y = -1$; $z = 3$. Следователно:

$$I = \text{const} \cdot \frac{c^3 \omega^2 h^2}{\gamma}$$

Б) Приемаме, че K е степенна функция, т.е.

$$h \propto \gamma^x c^y \frac{E_k}{R}$$

Лявата страна на уравнението е безразмерна, а размерностите на величините в дясната част са:

$$[\gamma] = \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^3; [c] = \text{s}^{-1} \cdot \text{m}; \left[\frac{E_k}{R} \right] = \text{J} \cdot \text{m}^{-1} = \text{N} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}$$

От равенството на размерностите в двете страни на уравнението получаваме:

$$\text{kg}^0 \cdot \text{s}^0 \cdot \text{m}^0 = \text{kg}^{1-x} \cdot \text{s}^{-2x-y-2} \cdot \text{m}^{3x+y+1}$$

откъдето намираме $x = 1$; $y = -4$. Следователно:

$$h = \text{const} \cdot \frac{\gamma E_k}{R c^4}$$

В) Ако обградим източника на вълна с мислена сфера с радиус R ($R \gg r$), то мощността на източника е:

$$P \propto I R^2 \propto \frac{c^3 \omega^2}{\gamma} \left(\frac{\gamma E_k}{R c^4} \right)^2 R^2 = \frac{\gamma}{c^5} \omega^2 E_k^2$$

Нека означим с r_1 и r_2 разстоянията от звездите до центъра на масата на системата:

$$\begin{aligned} M_1 r_1 &= M_2 r_2 \\ r_1 + r_2 &= r \\ \Rightarrow r_1 &= \frac{M_2 r}{M_1 + M_2}; \quad r_2 = \frac{M_1 r}{M_1 + M_2} \end{aligned}$$

От II принцип на Нютон:

$$\begin{aligned} M_1 \omega^2 r_1 &= M_2 \omega^2 r_2 = \frac{\gamma M_1 M_2}{r^2} \\ \Rightarrow \omega^2 &= \frac{\gamma (M_1 + M_2)}{r^3} \end{aligned}$$

За кинетичната енергия намираме:

$$E_k = \frac{1}{2} (M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2) \omega^2 = \frac{\gamma M_1 M_2}{2r}$$

Следователно, с точност до безразмерен множител, получаваме следния израз за излъчваната мощност:

$$P = \text{const} \cdot \frac{\gamma^4 (M_1 M_2)^2 (M_1 + M_2)}{c^5 r^5}$$

Г) Пълната енергия на системата е:

$$E = E_k + E_p = \frac{\gamma M_1 M_2}{2r} - \frac{\gamma M_1 M_2}{r} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{2r}$$

Излъчваната мощност е равна на скоростта, с която намалява пълната енергия на системата:

$$P = -\frac{dE}{dt} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{2r^2} \frac{dr}{dt}$$

Като използваме израза за мощността, намираме:

$$-\frac{\gamma M_1 M_2}{2r^2} \frac{dr}{dt} \propto \frac{\gamma^4 (M_1 M_2)^2 (M_1 + M_2)}{c^5 r^5}$$

откъдето, с отчитане на дадения безразмерен множител, получаваме:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{64\gamma^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{5c^5 r^3}$$

Д) След интегриране на полученото в т. Г уравнение, намираме:

$$r_0^4 - r_1^4 = \frac{512\gamma^3 M^3}{5c^5} t$$

Откъдето

$$t = \frac{5c^5 (r_0^4 - r_1^4)}{512\gamma^3 M^3}$$

Е) Периодът на гравитационната вълна е два пъти по-малък от периода на обикаляне на звездите, защото след половин обиколка, звездите заемат неразличими от гледна точка на гравитационното поле положения. Следователно ъгловата скорост ω на обикаляне на черните дупки е свързана с линейната честота ν на вълната като: $\omega = \pi\nu$. От получените в точка В съотношения, намираме ($M_1 = M_2 = M$):

$$r_0 = \frac{(2\gamma M)^{1/3}}{(\pi\nu_0)^{2/3}} \quad \text{и} \quad r_c = \frac{(2\gamma M)^{1/3}}{(\pi\nu_c)^{2/3}}$$

Също така от т. Д имаме:

$$r_0^4 - r_c^4 = \frac{512\gamma^3 M^3}{5c^5} t$$

Численото решаване на трите уравнения дава:

$$r_0 \approx 7.0 \times 10^5 \text{ m}; \quad r_c \approx 1.8 \times 10^5 \text{ m}; \quad M \approx 5.2 \times 10^{31} \text{ kg}.$$

Задача 3. Хексагонални структури

А) Нека $m_c = \mu/N_A$ е масата на въглеродния атом. Всеки въглероден атом принадлежи на три шестоъгълни клетки и дава принос $\frac{1}{3}m_c$ към масата на една клетка. Следователно масата на една клетка е:

$$m = 6 \times \frac{1}{3}m_c = 2m_c = \frac{2\mu}{N_A}$$

Площта на шестоъгълната клетка е:

$$S = 3\sqrt{3}a^2/2$$

Следователно повърхнинната плътност на графена е:

$$\lambda = \frac{m}{S} = \frac{4\mu}{3\sqrt{3}N_A a^2} = 7.6 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^2$$

Б) Да приемем, че в т. А се „инжектира” ток I , който се разпределя по цялата мрежа и „изтича” към безкрайно отдалечените точки. От съображения за симетрия е ясно, че токовете, които текат по резисторите AB и BC са съответно:

$$I'_{AB} = \frac{1}{3}I \text{ и } I'_{BC} = \frac{1}{2}I'_{AB} = \frac{1}{6}I$$

Ако от т. В се „отнема” ток I , тогава от същите съображения следва, че:

$$I''_{AB} = \frac{1}{3}I$$

Ако точките А и В са включени едновременно към източник на ток, тогава през резистора AB тече ток:

$$I_{AB} = I'_{AB} + I''_{AB} = \frac{2}{3}I$$

а напрежението върху резистора е $U_{AB} = \frac{2}{3}IR$. Следователно еквивалентното съпротивление между точките А и В е:

$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{2}{3}R$$

В) Електронът може да се върне в т. А или да попадне в точките С и Е само след четен брой подскоци. Следователно $P(A) = P(C) = P(E) = 0$.

Вероятността електронът да избере конкретна последователност от три отсечки е $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. За три стъпки електронът може да попадне в т. D само по два начина – като следва пътя ABCD или пътя AFED. Следователно

$$P(D) = 2 \times \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$$

Електронът може да попадне в т. В по пет различни пътя: ABCB, ABHB, ABAB, AFAB, AGAB. Следователно:

$$P(B) = 5 \times \frac{1}{27} = \frac{5}{27}$$

От съображения за симетрия:

$$P(F) = P(B) = \frac{5}{27}$$

