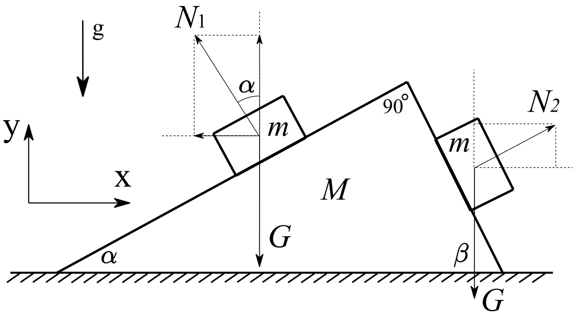
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
12 – 13 март 2016 г., Бургас
Тема за 11-12. клас, Решения и указания

Задача 1. *Механика - решение*

а) Работим в инерциална отправна система, т.е. разглеждаме силите в координатна система, която е неподвижна спрямо хоризонталната равнина. Налице са следните сили: върху телата действат реакциите на опората N_1 и N_2 и силите на тежестта G (изобразени на фиг. 1 а). Имаме



Фиг. 1 а

$$N_1 = mg\cos\alpha,$$
$$N_2 = mg\cos\beta. \quad \textbf{[1т]}$$

За компонентите по вертикалната ос намираме

$$N_{1y} = mg\cos^2\alpha,$$
$$N_{2y} = mg\cos^2\beta. \quad \textbf{[1т]}$$

Така за пълната сила намираме

$$N = mg\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta\right) + Mg = \left(m+M\right)g, \quad \textbf{[1т]}$$

където сме отчели, че $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

б) Клинът вече може да се движи свободно без триене по равнината. Приемаме, че се движи с ускорение a надясно. Върху клина действат реакциите на опората от страна на телата (3-ти принцип на Нютон), както и силите на тежестта. Следват динамичните уравнения, разложени по координатните оси. За лявото тяло (маса m):

$$-N_1\sin\alpha = ma_{1x},$$
$$N_1\cos\alpha - mg = ma_{1y}. \quad \textbf{[0.5т]}$$

За дясно тяло (маса m):

$$N_2\sin\beta = ma_{2x},$$
$$N_2\cos\beta - mg = ma_{2y}. \quad \textbf{[0.5т]}$$

За клина (маса M):

$$N_1\sin\alpha - N_2\sin\beta = Ma.$$

Телата се движат успоредно на повърхността на клина и затова векторите на ускоренията $\vec{a}_1 - \vec{a}$ и $\vec{a}_2 - \vec{a}$ също сочат успоредно на тези повърхности. Така за компонентите на a_1 и a_2 намираме

$$\frac{a_{1y}}{a_{1x} - a} = \tan\alpha, \quad \frac{a_{2y}}{a_{2x} - a} = -\tan\beta. \quad \textbf{[1т]}$$

Изразяваме всяка от компонентите от динамичните уравнения и ги заместваме в горните две уравнения:

$$\frac{N_1}{m} = g\cos\alpha - a\sin\alpha,$$
$$\frac{N_2}{m} = g\cos\beta + a\sin\beta.$$

Заместваме получените изрази в уравнението за клина, при което получаваме

$$m\left[g(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta) - a(\sin^2\alpha + \sin^2\beta)\right] = Ma.$$

Налагаме условието $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, при което получаваме

$$\left(m + M\right)a = 0.$$

Така намираме ускорението на клина

$$a = 0.$$ **[1т]**

Тъй като $a = 0,$ за силата, с която телата действат на равнината, отново получаваме

$$N = \left(m + M\right)g.$$ **[1т]**

в) Запазват се механичната енергия и импулса на системата по *x*:

$$mgH = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$ **[1т]**
$$mv_{1x} + Mv = 0.$$

Имаме и връзките

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x} - v} = \tan\alpha,$$ **[1т]**
$$v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_1^2.$$

Намираме

$$2gH = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + \frac{M}{m}v^2,$$
$$v_{1x} = -\frac{M}{m}v,$$
$$v_{1y} = -v\left(1 + \frac{M}{m}\right)\tan\alpha.$$

Така получаваме

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m}\right)^2 + \left(1 + \frac{M}{m}\right)^2\tan^2\alpha}}$$ **[0.4т]**

и

$$v_1 = \sqrt{2gH - \frac{M}{m}v^2} = \sqrt{2gH\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{M}{m} + \frac{m}{M}\left(1 + \frac{M}{m}\right)^2\tan^2\alpha}\right)}.$$ **[0.4т]**

За съответните стойности намираме $v = 2\,\text{m/s}$ **[0.1т]** и $v_1 = 2\sqrt{13}\ \text{m/s} \approx 7.21\ \text{m/s}.$ **[0.1т]**

Задача 2. *Флуиди - решение*

а) Прилагаме закона на Бернули за точка от водната повърхност с височина y и за точка от дъното с височина 0:

$$P_0 + \rho g y + \frac{\rho v_y^2}{2} = P_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \textbf{ [1т]}.$$

В опростен вид изразът приема вида: $2gy + v_y^2 = v_0^2$. В сила е и принципът за непрекъснатостта:

$$v_y S = v_0 S_0 \textbf{ [1т]}.$$

От последните две уравнения получаваме:

$$v_y = S_0 \sqrt{\frac{2gy}{S^2 - S_0^2}} \textbf{ [0.5т]} \text{ и } v_0 = S \sqrt{\frac{2gy}{S^2 - S_0^2}} \textbf{ [0.5т]}.$$

б) Отново прилагаме закона на Бернули между повърхността и дъното:

$$P_0 + \rho g y + \frac{\rho v_y^2}{2} = P_0 + \rho g y_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \textbf{ [1т]}.$$

В опростен вид изразът има вида: $2g(y - y_0) + v_y^2 = v_0^2$. Прилагаме и принципа за непрекъснатостта:

$$v_y \pi x^2 = v_0 \pi x_0^2 \textbf{ [1т]},$$

където сме използвали формулата за площ на кръг. Така намираме

$$v_y^2 = 2g \frac{y - y_0}{x^4 - x_0^4} x_0^4 \textbf{ [1т]}.$$

Налагаме условието за постоянна скорост, откъдето намираме формата на съда:

$$y = y_0 - \frac{v_y^2}{2g} + \frac{v_y^2}{2g} \frac{x^4}{x_0^4} \textbf{ [1т]}.$$

в) На покрива действат следните сили: тежестта mg (посока надолу), натиск от страна на въздуха над покрива $P_1 S$ (надолу) и натиск от страна на въздуха под покрива $P_0 S$ (нагоре). Максимално допустимият дисбаланс между тези сили, такъв че покривът да не се отдели от сградата, се компенсира от силата на опън F_0 (надолу). Получаваме следното уравнение

$$P_1 S - P_0 S + mg + F_0 = 0. \textbf{ [1т]}$$

В сила е уравнението на Бернули, свързващо налягането в сградата с налягането непосредствено над покрива (токовата линия „влиза“ в сградата):

$$P_0 = P_1 + \frac{\rho v_0^2}{2}, \textbf{ [1т]}$$

където v_0 е търсената минимална скорост. Така намираме

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(mg + F_0)}{\rho S}} . \textbf{[1т]}$$

Задача 3. *Оптика – решение*

Част А

а) Прилагаме закона на Снелиус за всяка една граница:

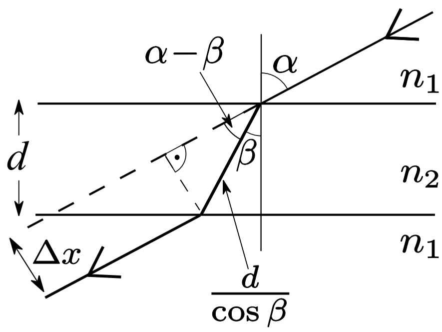
$$\begin{aligned} &n_1 \sin\alpha_1 = n_2 \sin\alpha_2, \\ &n_2 \sin\alpha_2 = n_3 \sin\alpha_3, \\ &\vdots \\ &n_{N-1} \sin\alpha_{N-1} = n_N \sin\alpha_N. \end{aligned} \quad \textbf{[0.5т]}$$

Така намираме уравнението $n_1 \sin\alpha_1 = n_N \sin\alpha_N$, откъдето получаваме

$$\alpha_N = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_N}\sin\alpha_1\right). \textbf{[0.5т]}$$

б) Законът на Снелиус за първата граница е

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta \,.\textbf{[0.25т]}$$



Лъчът в третата среда е успореден на падналия. За отместването намираме

$$\Delta x = d\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} = d\,\frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta},\textbf{[1т]}$$

където сме ползвали, че $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$. Така намираме

$$\Delta x = d\left(\sin\alpha - \cos\alpha\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = d\left(\sin\alpha - \cos\alpha\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}\right).\textbf{[0.5т]}$$

Използваме закона на Снелиус:

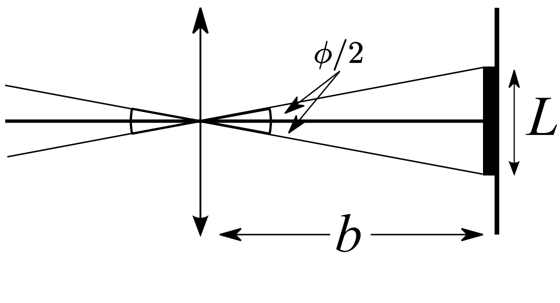
$$\Delta x = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\frac{n_1}{n_2}\cos\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)^2}}\right).\textbf{[1т]}$$

За дадените стойности имаме $\Delta x \approx 0.33$ см. **[0.25т]**

Част Б

а) От фигурата се вижда, че

$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{L}{2b}$, откъдето получаваме



$$\phi = 2\arctan\frac{L}{2b}\ .\textbf{[0.5т]}$$

Разстоянието b намираме от формулата $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$:

$$b=\frac{af}{a-f}\ .\textbf{[0.5т]}$$

Така намираме

$$\phi = 2\arctan\frac{L(a-f)}{2af}\approx 89.4^{\circ}\ .\textbf{[1т]}$$

б) Във фотоапарата влиза светлинен поток с мощност

$$P = I_0 S = I_0\frac{\pi d^2}{4}\ .\textbf{[0.75т]}$$

Тази мощност се разпределя върху кръг с приблизителен диаметър αf и площ $S^{'}=\frac{\pi\alpha^2 f^2}{4}$ **[0.75т]**. Така за мощността на единица площ имаме $\frac{P}{S^{'}}=I_0\left(\frac{d}{\alpha f}\right)^2$ **[0.5т]**. За равновесната температура имаме

$$\sigma T_0^4=\frac{P}{S^{'}}=I_0\left(\frac{d}{\alpha f}\right)^2,\textbf{[1т]}$$

откъдето получаваме

$$T_0=\left(\frac{I_0}{\sigma}\left(\frac{d}{\alpha f}\right)^2\right)^{1/4}\approx 390\ \text{K.}\ \textbf{[1т]}$$