

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, 7 март 2015 г.
Решения на задачите от Специалната тема

Задача 1. Падаща стълба.

а) Центърът на масата на стълбата ще се намира на разстояние l от точката, където се пресичат пода и стената (свойство на медианата към хипотенузата в правоъгълен триъгълник). [0.5 т.] Следователно, докато двата края на стълбата опират съответно в пода и стената, траекторията на движение на центъра на масата ѝ ще бъде окръжност с радиус l . [0.5 т.]

б) Тъй като няма триене, механичната енергия на стълбата се запазва. [0.5 т.] Отчитайки промяната на потенциалната енергия, кинетичната енергия на въртеливото движение на стълбата и на постъпателното движение на центъра C на масата ѝ, се получава: $mgl \sin \beta = mgl \sin \alpha + \frac{1}{2} \frac{1}{12} m(2l)^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v_C^2$. [1 т.] Тъй като центърът на масата на стълбата се движи по окръжност, $v_C = l\omega$. [0.5 т.] Тогава $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}(\sin \beta - \sin \alpha)}$. (1.1) [1 т.]

в) Пренаписваме (1.1) във вида $g \sin \beta = g \sin \alpha + \frac{2}{3} l \omega^2$. Диференцирайки по времето, се получава $0 = g \cos \alpha \omega + \frac{2}{3} l 2\omega \varepsilon$, [0.5 т.] откъдето $\varepsilon = -\frac{3g}{4l} \cos \alpha$. (1.2) [0.5 т.]

г) На стълбата действат три сили – две вертикални (силата на тежестта mg и реакцията на опората R_1 от пода) и една хоризонтална (реакцията на опората R_2 от стената). [0.25 т.] Следователно $R_2 = ma_x$, където a_x е хоризонталната компонента на ускорението на центъра на масата на стълбата. От друга страна центростремителното ускорение на центъра на масата при движението му по окръжността е $a_n = l\omega^2$, (1.3) [0.25 т.] тангенциалното ускорение на центъра на масата при движението му по окръжността е $a_t = l|\varepsilon|$ (1.4). [0.25 т.] Тогава $a_x = a_t \sin \alpha - a_n \cos \alpha$. [0.25 т.] В момента на отлепването на горния край на стълбата от стената $R_2 = 0$ и $\alpha = \gamma$. Следователно $0 = l|\varepsilon| \sin \gamma - l\omega^2 \cos \gamma$. [1 т.] Замествайки с (1.1) и (1.2), след преобразования $\sin \gamma = \frac{2}{3} \sin \beta$. (1.5) [1 т.]

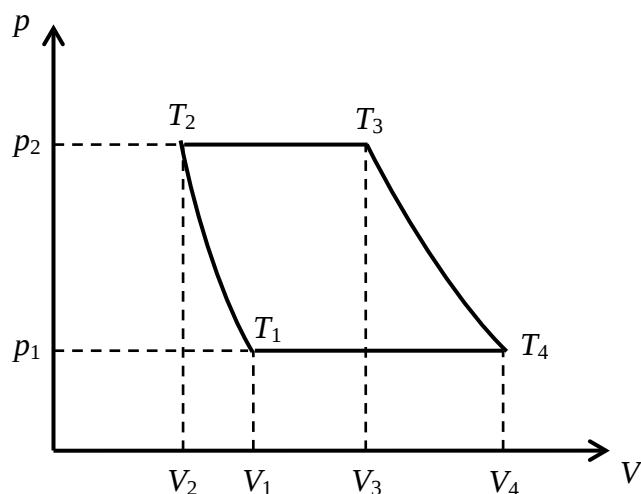
д) В момента на отлепването на горния край на стълбата от стената $R_1 - mg = ma_y$, [0.25 т.] където $a_y = -a_t \cos \gamma - a_n \sin \gamma$. [0.25 т.] След заместване на ускоренията от (1.3) и (1.4) се получава $R_1 = mg - ma_t \cos \gamma - ma_n \sin \gamma$ [0.25 т.] $= m \left[g - l \frac{3g}{4l} (\cos \gamma)^2 - l \frac{3g}{2l} (\sin \beta - \sin \gamma) \sin \gamma \right]$. [0.25 т.] Използвайки (1.5), се получава $R_1 = \frac{mg}{4}$. [1 т.]

Задача 2. Две независими подзадачи.

А. Цикъл на Джаул.

а) Цикълът на p - V диаграма изглежда така (виж фигурата) [0.5 т.]

б) Коефициентът на полезно действие η на тази топлинна машина е $\eta = A/Q$, [0.25 т.] където A е извършената механична работа от топлинната машина за един цикъл, а Q е полученото количество топлина за него. Работата A е сума на работите, извършени по време на четирите процеса: $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$. За двата изобарни процеса



$A_{23} = p_2(V_3 - V_2)$, $A_{41} = p_1(V_1 - V_4)$. [0.25 т.] За двата адиабатни процеса от първия принцип на термодинамиката следва, че $A_{34} = -\Delta U_{34} = -C_V(T_4 - T_3)$, $A_{12} = -\Delta U_{12} = -C_V(T_2 - T_1)$. [0.25 т.] Нека предположим, че работният газ е един мол (η не зависи от количеството вещество на работния газ). Тогава използвайки уравнението на идеалния газ, получаваме $A_{23} = R(T_3 - T_2)$, $A_{41} = R(T_1 - T_4)$. [0.25 т.] Така за работата A се получава $A = -C_V(T_2 - T_1) + R(T_3 - T_2) - C_V(T_4 - T_3) + R(T_1 - T_4) = (C_V + R)(T_1 - T_2 + T_3 - T_4) = C_p(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)$. [0.5 т.]

Полученото количество топлина за един цикъл $Q = Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = C_p(T_3 - T_2)$.

[0.5 т.] Следователно $\eta = \frac{C_p(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)}{C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$. [0.25 т.] Използвайки закона за

адиабатния процес $pV^\gamma = const.$ и преобразувайки го до $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const.$ [0.25 т.], за двата адиабатни процеса получаваме съответно $T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, $T_4 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, откъдето следва, че $\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$. [0.5 т.] След заместване, $\eta = 1 - \frac{T_4(1 - \frac{T_1}{T_4})}{T_3(1 - \frac{T_2}{T_3})} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 -$

$$\left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}. [1 т.]$$

в) Двухатомните нетрептящи молекули имат $i = 5$ степени на свобода и показателят на адиабатата е $\gamma = \frac{5+2}{5} = 1,4$. [0.25 т.] Така за коефициента на полезно действие се получава $\eta = 1 - 15^{\frac{1-1,4}{1,4}} \approx 0,54$. [0.25 т.]

Б. Атмосферно налягане в шахта.

а) Ускорението на свободно падане $g(r)$ в шахтата на разстояние r от центъра на планетата ($r < r_0$) може да се намери от закона за всеобщото привличане, приравнявайки силата на тежестта, която всъщност е гравитационна сила. Отчитайки факта, че само масата, намираща се на разстояние r от центъра на планетата, по-малко от r_0 , привлича малко тяло с маса m , поставено там (резултантната сила на привличане от „външния“ слой от планетата е нула): $mg(r) = \frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{G\rho 4\pi r^3 m}{3r^2}$, откъдето $g(r) = \frac{G4\pi\rho r}{3}$ [0.25 т.]. Съответно за повърхността на планетата $g_0 = g(r_0) = \frac{G4\pi\rho r_0}{3}$. Разделяйки двете равенства, се получава $g(r) = g_0 \frac{r}{r_0}$. (2.1) [0.25 т.]

б) Разглеждаме тънък слой газ с дебелина dr и площ S на разстояние r от центъра на планетата. Нека налягането на газа там е $p(r)$, а плътността му е $\rho(r)$. Тъй като този слой газ е в равновесие, действащите му сили трябва да се уравниравняват: $\rho(r)Sdr g(r) = -dpS$. Или $dp = -\rho(r)g(r)dr$. (2.2) [0.5 т.] Използвайки (2.1) и изразявайки $\rho(r)$ от уравнението на идеалния газ $\rho(r) = \frac{p(r)\mu}{RT}$, (2.2) се преобразува до $dp = -\frac{p(r)\mu}{RT}g_0\frac{r}{r_0}dr$, [0.5 т.] откъдето $\frac{dp}{p(r)} = -\frac{\mu g_0}{RT r_0}rdr$. Интегрирайки двете страни, $\ln p(r) = -\frac{\mu g_0}{2RT r_0}r^2 + C$. [1 т.] За повърхността същото равенство е $\ln p(r_0) = -\frac{\mu g_0}{2RT r_0}r_0^2 + C$. [1 т.] Изваждайки двете равенства и антилогаритмувайки, се получава $p(r) = p_0 e^{-\frac{\mu g_0}{2RT r_0}(r^2 - r_0^2)} = p_0 e^{\frac{\mu g_0}{2RT r_0}(r_0^2 - r^2)}$. [1 т.]

в) Използвайки дадените стойности, атмосферното налягане в шахтата на дълбочина $h = 10$ km от повърхността на планетата е $p(r) = p_0 e^{\frac{\mu g_0}{2RT r_0}(r_0^2 - r^2)} = p_0 e^{\frac{\mu g_0}{2RT r_0}(r_0 - r)(r_0 + r)} \approx p_0 e^{\frac{\mu g_0 h}{RT}} \approx 3,13 p_0 \approx 3,13 \cdot 10^5$ Pa. [0.25 т.] За атмосферното налягане в центъра на планетата се получава $p(r) = p_0 e^{\frac{\mu g_0 r_0}{2RT}} \approx 4,2 \cdot 10^{158} p_0$!!! ☺ [0.25 т.] Последният резултат естествено няма физически смисъл (следствие от предположението за идеалност на газа).

Задача 3. Две независими подзадачи.

А. Плазмена честота.

а) Нека облакът-слой свободни електрони е отклонен спрямо неподвижния положително зареден слой на разстояние x в посока на размера l . Тогава на двете срещуположни квадратни стени на слоя се образуват положително и отрицателно заредени слоеве с дебелина x , докато останала му част остава електронеутрална. Следователно този слой ще се държи като зареден кондензатор с капацитет $C = \frac{\epsilon_0 S}{d} = \frac{\epsilon_0 L^2}{l}$ [0.5 т.] и заряд $Q_{\text{пл}} = nV_x e = nL^2 x e$. [0.5 т.] Напрежението между „плочите“ му ще бъде $U = \frac{Q_{\text{пл}}}{C} = \frac{nLx e}{\epsilon_0}$, а интензитетът на електричното поле в „кондензатора“ е $E = \frac{U}{l} = \frac{nxe}{\epsilon_0}$. [0.5 т.] Квазиеластичната сила, която действа на подвижните електрони от „вътрешността“ на кондензатора, е $F = Q_{\text{вътр}} E = nL^2 l e \frac{nxe}{\epsilon_0} = \frac{n^2 L^2 l x e^2}{\epsilon_0}$. [0.5 т.] От втория закон на Нютон, следва $F = ma$; $\frac{n^2 L^2 l x e^2}{\epsilon_0} = -nL^2 l m_e \ddot{x}$, откъдето $\ddot{x} + \frac{ne^2}{m_e \epsilon_0} x = 0$. [0.5 т.] Това уравнение описва хармонично трептене с честота $\nu_{\text{pl}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{ne^2}{m_e \epsilon_0}}$. [0.5 т.]

б) Критичната дължина на вълната $\lambda_{\text{кр}}$, за която електромагнитни вълни с дължина на вълната $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ се отразяват от йоносферата на Земята, е $\lambda_{\text{кр}} = \frac{c}{\nu_{\text{pl}}} = 2\pi c \sqrt{\frac{m_e \epsilon_0}{ne^2}} = \frac{2\pi c}{e} \sqrt{\frac{m_e \epsilon_0}{n}} = \frac{2\pi \cdot 3,00 \cdot 10^8 \text{ m/s}}{1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \sqrt{\frac{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}}{10^{12} \text{ m}^{-3}}} \approx 33,5 \text{ m}$. [1 т.]

в) Минималната енергия E_{min} (в eV) на фотони, за които металът алуминий е прозрачен, е $E_{\text{min}} = h\nu_{\text{pl}} = h \frac{e}{2\pi} \sqrt{\frac{n}{m_e \epsilon_0}} = \frac{he}{2\pi} \sqrt{\frac{3\rho}{m_e \epsilon_0 A u}} = \frac{6,63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}}{2\pi} \sqrt{\frac{3,270 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3}{9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}} \cdot 27,0 \cdot 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} \approx 15,8 \text{ eV}$. [1 т.]

Б. Нютонови пръстени.

а) Нека на разстояние r от центъра на лещата въздушната междина между лещата и пластинката е h . От Питагоровата теорема $R^2 = (R - h)^2 + r^2$, откъдето при $R \gg r$ следва, че и $r \gg h$ и тогава $r = \sqrt{2Rh}$. **[0.5 т.]** Там разликата в оптичните ходове на двата лъча е $\Delta = 2n_b h + \lambda/2$ **[0.5 т.]** (последното събираемо се дължи на факта, че единият лъч се отразява от оптично по-плътна среда, а другият – от оптично по-рядка среда). k -тият светъл пръстен ще се наблюдава при радиус r_k , за който $\Delta = k\lambda$. **[0.5 т.]** Тогава $h_k = \frac{1}{n_b} \left(\frac{\Delta}{2} - \frac{\lambda}{4} \right)$ и $r_k = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda R}{n_b}}$. **[0.5 т.]**

б) При преместване на призмата на разстояние d разликата в оптичните пътища ще се увеличи с $2n_b d$. Когато „изчезват“ N светли пръстена, също така и се преместват N светли пръстена. Затова, ако на едно място се е наблюдавал m -тия максимум, след преместването на лещата на същото място ще се наблюдава $m + N$ -тия максимум. Затова $2n_b d = N\lambda_{cp}$, откъдето $\lambda_{cp} = \frac{2n_b d}{N} = \frac{2.88,4 \mu m}{300} = 589,3 \text{ nm}$. **[0.5 т.]**

в) Тъй като оптичната система се осветява с две монохроматични светлини, всъщност се наблюдават две интерференчни картини с практически еднакъв (неразличим) цвят. Контрастът на резултантната интерференчна картина зависи от това колко са отместени максимумите на едната картина спрямо тези на другата. Тъй като при двулъчева интерференция интензитетът на интерференчната картина се променя с координатата (в случая радиуса) приблизително като синусоида, при две отместени интерференчни картини, когато минимумите на едната съвпадат с максимумите на другата, резултантната интензивност ще е на практика константа, т.е. ще се наблюдава силно отслабване на контраста на резултантната интерференчна картина. **[0.5 т.]** При движение на лещата нагоре, по-бързо ще се движат и „изчезват“ максимумите на картината, дължаща се на светлината с по-малката дължина на вълната. Нека на някакво място (където въздушната междина е h) първоначално се наблюдава k_1 -ти минимум на светлината с дължина на вълната $\lambda_{cp} - \frac{\Delta\lambda}{2}$ и k_2 -ти максимум на светлината с дължина на вълната $\lambda_{cp} + \frac{\Delta\lambda}{2}$ (ситуация на минимален контраст). От условието за максимум и минимум следва, че $2n_b h + \frac{1}{2} \left(\lambda_{cp} - \frac{\Delta\lambda}{2} \right) = \left(k_1 + \frac{1}{2} \right) \left(\lambda_{cp} - \frac{\Delta\lambda}{2} \right)$ (3.1) и $2n_b h + \frac{1}{2} \left(\lambda_{cp} + \frac{\Delta\lambda}{2} \right) = k_2 \left(\lambda_{cp} + \frac{\Delta\lambda}{2} \right)$ (3.2). След преместване на лещата на разстояние L , на същото място ще се наблюдават $k_1 + m + 1$ -ти минимум на светлината с дължина на вълната $\lambda_{cp} - \frac{\Delta\lambda}{2}$ и $k_2 + m$ -ти максимум на светлината с дължина на вълната $\lambda_{cp} + \frac{\Delta\lambda}{2}$ (отново ситуация на минимален контраст). Тогава $2n_b(h + L) + \frac{1}{2} \left(\lambda_{cp} - \frac{\Delta\lambda}{2} \right) = \left(k_1 + m + 1 + \frac{1}{2} \right) \left(\lambda_{cp} - \frac{\Delta\lambda}{2} \right)$ (3.3) и $2n_b(h + L) + \frac{1}{2} \left(\lambda_{cp} + \frac{\Delta\lambda}{2} \right) = (k_2 + m) \left(\lambda_{cp} + \frac{\Delta\lambda}{2} \right)$ (3.4). **[0.5 т.]** Изваждайки (3.2) от (3.4) се получава $2n_b L = m \left(\lambda_{cp} + \frac{\Delta\lambda}{2} \right)$ (3.5). Изваждайки (3.3) от (3.1) се получава $2n_b L = (m + 1) \left(\lambda_{cp} - \frac{\Delta\lambda}{2} \right)$ (3.6). Сравнявайки десните страни на (3.5) и (3.6) се получава $m \left(\lambda_{cp} + \frac{\Delta\lambda}{2} \right) = (m + 1) \left(\lambda_{cp} - \frac{\Delta\lambda}{2} \right)$ (3.7). Използвайки (3.7) и (3.5), както и че $\Delta\lambda \ll \lambda_{cp}$ (откъдето следва, че и $m \gg 1$), се получава $\Delta\lambda \approx \frac{\lambda_{cp}^2}{2n_b L}$. **[0.5 т.]** Използвайки дадената стойност за L и получената стойност за λ_{cp} , изчислената стойност за $\Delta\lambda$ е $\Delta\lambda \approx 0,60 \text{ nm}$. **[0.5 т.]**