

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, Сандански, 15-16.03.2014
Решения на Специалната тема

Задача 1. Космическа станция

Основни данни

А) Понеже $g \propto \frac{1}{r^2}$, където r е разстоянието до центъра на Земята, следва:

$$g = \frac{g_0 R^2}{(R + h)^2}$$

При движение по кръгова орбита:

$$\frac{v^2}{R + h} = g$$

откъдето:

$$v = R \sqrt{\frac{g_0}{R + h}}$$

и

$$T = \frac{2\pi(R + h)}{v} = \frac{2\pi(R + h)^{3/2}}{R g_0^{1/2}} = 2\pi \sqrt{\frac{R \left(1 + \frac{h}{R}\right)^3}{g_0}}$$

За Международната космическа станция:

$$T = 5.58 \times 10^3 \text{ s}$$

Б) Наблюдателят вижда тази част от траекторията, която е разположена над равнината на хоризонта. Тя представлява дъга, съответстваща на централен ъгъл:

$$\phi = 2 \arccos \left(\frac{R}{R + h} \right)$$

Времето, за което станцията се намира над хоризонта, е съответно:

$$t = \frac{T\phi}{2\pi} = \frac{2(R + h)^{3/2}}{R g^{1/2}} \arccos \left(\frac{R}{R + h} \right)$$

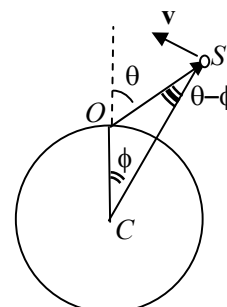
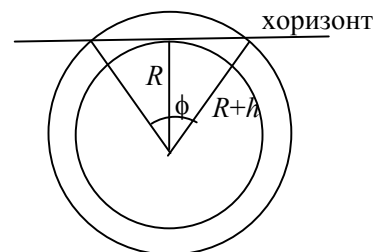
За Международната космическа станция получаваме:

$$t = 630 \text{ s} = 10.5 \text{ min}$$

В) Ъгловата скорост на станцията може да бъде изразена като:

$$\beta = \frac{v_{\perp}}{d}$$

където $d = |OS|$ е разстоянието между наблюдателя и станцията, а $v_{\perp}$ е компонентата на скоростта, перпендикулярна на зрителния лъч. От фигурата е ясно, че:



$$v_{\perp} = v \cos(\theta - \phi) = \frac{2\pi(R+h)\cos(\theta - \phi)}{T}$$

$$(R+h)^2 = d^2 + R^2 + 2dR\cos(\theta)$$

$$\frac{\sin(\theta - \phi)}{R} = \frac{\sin \theta}{R+h}$$

След кратки ☺ алгебрични преобразования намираме:

$$\beta = \frac{2\pi\sqrt{R^2 \cos^2 \theta + 2Rh + h^2}}{T(\sqrt{R^2 \cos^2 \theta + 2Rh + h^2} - R \cos \theta)}$$

Г) В зенита $\theta = 0$ и:

$$\beta_z = \frac{2\pi(R+h)}{Th}$$

При пресичането на хоризонта $\theta = \pi/2$ и съответно:

$$\beta_h = \frac{2\pi}{T}$$

Следователно:

$$\frac{\beta_z}{\beta_h} = 1 + \frac{R}{h}$$

Д) Ъгловата скорост на станцията в зенита е:

$$\beta_z = \frac{2\pi(R+h)}{Th} = 1.8 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$$

В същия момент ъгловата скорост на самолета спрямо наблюдателя е:

$$\beta_1 = \frac{v_1}{h_1} = 3.0 \times 10^{-2} \text{ rad/s}$$

Следователно от земята ще изглежда, че самолетът се движи по-бързо от станцията.

Задача 2. Лазер на свободни електрони

А) Пространственият период на траекторията е равен на разстоянието между два магнита с еднаква полярност, което е $2d$. От условието:

$$y(x+2d) = y(x)$$

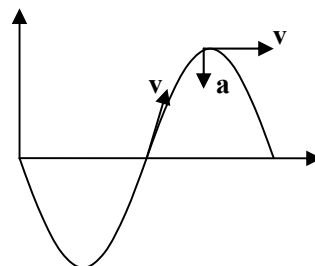
намираме $2kd = 2\pi$ или:

$$k = \frac{\pi}{d} \approx 314 \text{ m}^{-1}$$

Б) Понеже магнитната сила е насочена перпендикулярно на скоростта на електрона, скоростта му остава постоянна, докато се движи в магнититното поле:

$$v = \text{const}$$

В точка с координата $y = 0$ скоростта на електрона сключва максимален ъгъл с оста X . Следователно в тази точка електронът има минимална компонента на скоростта по X и



максимална – по Y . От условието за екстремум на функцията следва:

$$a_x(0) = \frac{dv_x}{dt} = 0 \text{ и } a_y(0) = \frac{dv_y}{dt} = 0$$

В точка с координата $y = +A$ скоростта на електрона е успоредна на оста X . Следователно в тази точка електронът има максимална компонента на скоростта по X и от условието за екстремум получаваме:

$$a_x(A) = \frac{dv_x}{dt} = 0$$

Компонентата на скоростта по Y е нула, като променя знака си, поради което електронът има ненулево ускорение по Y . За да го определим, диференцираме уравнението на траекторията два пъти по времето:

$$\dot{y} = kA \cos(kx + \phi) \dot{x}$$

$$\ddot{y} = -k^2 A \sin(kx + \phi) \dot{x}^2 + kA \cos(kx + \phi) \ddot{x} = -k^2 y \dot{x}^2 + kA \cos(kx + \phi) \ddot{x}$$

Понеже в тази точка $y = A$, $\dot{x} = v$ и $\ddot{x} = a_x = 0$, следва:

$$a_y(A) = -k^2 A v^2 = -\left(\frac{\pi v}{d}\right)^2 A$$

Като алтернативно решение, от условието $v = \text{const}$ следва, че електронът има единствено нормално ускорение $a = K v^2$, където $K = 1/R$ е кривината на траекторията. В точката $y = 0$ имаме $K = 0$ и $a = 0$. В точката $y = +A$ имаме $K = |y''(x)| = k^2 A$, откъдето, като съобразим, че ускорението е насочено в отрицателната посока на оста y , получаваме горния израз за компонентите.

В) Малък участък от траекторията има дължина:

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx = \sqrt{1 + (kA \cos(kx + \phi))^2} dx$$

Условието $A \ll d$ е еквивалентно на $kA \ll 1$. Като използваме приблизителното равенство на Бернули, получаваме:

$$ds = \left(1 + \frac{1}{2}(kA \cos(kx + \phi))^2\right) dx$$

Пътят, който изминава електронът за един период, е:

$$s = \int_0^{2d} \left(1 + \frac{1}{2}(kA \cos(kx + \phi))^2\right) dx = 2d \left(1 + \left(\frac{kA}{2}\right)^2\right) = 2d \left(1 + \left(\frac{\pi A}{2d}\right)^2\right)$$

Понеже електронът се движи с постоянна скорост, времето за изминаване на този път е:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2d}{v} \left(1 + \left(\frac{\pi A}{2d}\right)^2\right)$$

Следователно:

$$T_0 = \frac{2d}{v} \text{ и } \alpha = \frac{\pi^2}{4}$$

Г) Дължината на вълната е равна на разстоянието между две вълнови повърхности, излъчени през интервал T една след друга. От момента на излъчването на първата повърхност, тя изминава разстояние:

$$l = cT$$

в посока на оста X . За същото време електронът изминава разстояние $2d$ в същата посока. Следователно дължината на вълната е:

$$\lambda = cT - 2d = 2d \left(\frac{c}{v} - 1 \right) + \frac{\pi^2 A^2 c}{2d v}$$

Д) На електрона действа магнитна сила $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$, където знакът „ $-$ “ отчита отрицателния заряд на електрона. На фигурата е показана посоката на магнитната сила, когато електронът минава през върха на траекторията, т.е. когато $x = +A$. Като приложим правилото на лявата ръка (заради отрицателния заряд на електрона), определяме, че в същата точка магнитната индукция е насочена от нас към чертежа, т.е. $B_z = -B_0$. Следователно траекторията и магнитната индукция са в противофаза:

$$\phi = \pi$$

Е) Прилагаме II принцип на механиката за върха на траекторията:

$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} k^2 A v^2 = e v B_0$$

откъдето намираме:

$$A = \frac{e B_0}{m v k^2} \sqrt{1 - v^2/c^2}$$

От релятивистката връзка между импулс и енергия имаме:

$$\frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\sqrt{E^2 - (m c^2)^2}}{c}$$

където $m c^2 = 0.51 \text{ MeV}$ е енергията в покой на електрона, а $E = m c^2 + E_k = 50.5 \text{ MeV}$ е пълната му релятивистка енергия. Понеже $E \gg m c^2$, имаме:

$$\frac{m v}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{E}{c}$$

откъдето:

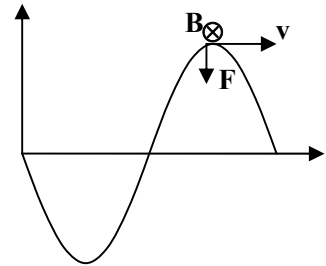
$$A = \frac{e B_0 c}{E k^2} = 9.0 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Ж) Очевидно в израза за периода можем да пренебрегнем събираемостта $\alpha \left(\frac{A}{d} \right)^2 = 2 \times 10^{-6}$.

Тогава за λ получаваме приблизителен израз, който преобразуваме, като използваме, че $v \approx c$:

$$\lambda = 2d \left(\frac{c}{v} - 1 \right) = \frac{2dc}{v} \left(1 - \frac{v}{c} \right) \approx d \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \right) = d \left(\frac{m c^2}{E} \right)^2 = 1.0 \times 10^{-6} \text{ m} = 1.0 \text{ } \mu\text{m}$$

Това е лъчение в инфрачервената област на спектъра.



Задача 3. Радиоактивна планета

А) Броят ядра от даден изотоп в единица обем се дава с израза:

$$N = \frac{N_A c \rho}{M}$$

където c е масовата концентрация на изотопа, а M – моларната му маса. Понеже броят ядра намалява с времето по закона:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

където $\lambda = \ln 2 / T_{1/2}$ е константата на разпадане, намираме броя разпадания за единица време в единица обем:

$$f = -\frac{dN}{dt} = \frac{\ln 2 N_A c \rho}{T_{1/2} M}$$

Следователно отделената топлина за единица време в единица обем, вследствие от разпадането на дадения изотоп, е:

$$q = fE = \frac{\ln 2 N_A c \rho E}{T_{1/2} M}$$

За ${}^{238}_{92}\text{U}$ ($M = 0.238 \text{ kg/mol}$) имаме $q({}^{238}\text{U}) = 1.6 \times 10^{-8} \text{ W/m}^3$, а за ${}^{232}_{90}\text{Th}$ ($M = 0.232 \text{ kg/mol}$) имаме $q({}^{232}\text{Th}) = 1.8 \times 10^{-8} \text{ W/m}^3$. Общата плътност на топлинната мощност е:

$$q = 3.4 \times 10^{-8} \text{ W/m}^3$$

Б) Общата мощност, която се отделя в планетата е:

$$P = \frac{4}{3} \pi R^3 q$$

Тази мощност се отделя под формата на излъчване от повърхността на планетата:

$$\sigma T_S^4 \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3} \pi R^3 q$$

откъдето намираме:

$$T_S = \sqrt[4]{\frac{qR}{3\sigma}} = 34 \text{ K}$$

В) Топлината се пренася към повърхността посредством топлопроводност. От закона на Фурие следва:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 q = k_s \frac{dT}{dh} 4\pi R^2 = 4\pi R^2 k_s A$$

откъдето:

$$A = \frac{qR}{3k_s} = 0.025 \text{ K/m} = 25 \text{ K/km}$$

Г) На дълбочина $h = d$ имаме:

$$T_m = T_S + Ad$$

Следователно:

$$d = \frac{T_m - T_S}{A} = 5.86 \times 10^4 \text{ m} = 58.6 \text{ km}$$

Д) На границата между твърдата и течната част, $r = R - d$, потокът на топлината, идващ от течността, е равен на потока, минаващ през твърдата кора:

$$k_s \frac{dT}{dh} \Big|_{h=d-\epsilon} = k_m \frac{dT}{dh} \Big|_{h=d+\epsilon} = -k_m \frac{dT}{dr} \Big|_{r=R-d-\epsilon}$$

Следователно:

$$k_s A = \frac{2k_m B(R-d)}{R^2}$$

$$B = \frac{k_s A R^2}{2k_m(R-d)} = 6.16 \times 10^3 \text{ K}$$

За границата между течността и твърдата кора имаме:

$$T_m = T_c - B \left(\frac{R-d}{R} \right)^2$$

Окончателно получаваме:

$$T_c = T_m + B \left(\frac{R-d}{R} \right)^2 = 7550 \text{ K}$$