

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, Сандански, 15-16.03.2014
Специална тема

Задача 1. Космическа станция

Космическа станция обикаля Земята по кръгова орбита на височина h над земната повърхност. На земята, в равнината на орбитата на станцията, се намира наблюдател, който вижда станцията като малка светла движеща се точка в небето. Поради голямата отдалеченост на станцията в сравнение със собствения ѝ размер, наблюдателят няма зрителна представа за разстоянието до станцията.

В тази задача можете да пренебрегнете околоосното въртене на Земята. Приемете Земята за равномерно кълбо с гладка повърхност. Оптичните аберации на атмосферата се пренебрегват.

Основни данни

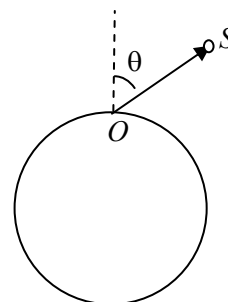
Радиус на Земята, $R = 6.37 \times 10^6 \text{ m}$

Гравитационно ускорение върху земната повърхност, $g_0 = 9.81 \text{ m/s}^2$

А) Получете израз за периода T на обикаляне на станцията като функция на h и основните данни. Пресметнете T за Международната космическа станция, която обикаля на височина 423 km над земята. **[2.5 т]**

Б) За колко време t наблюдателят ще вижда станцията на небето? Получете израз за t и го пресметнете за Международната космическа станция. **[1.5 т]**

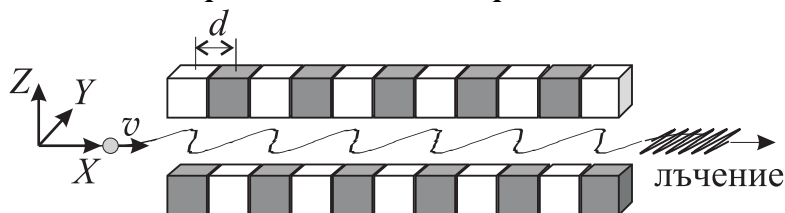
В) Станцията се намира над хоризонта в точка S , чийто радиус-вектор $\vec{OS}$ спрямо наблюдателя O сключва ъгъл θ с вертикалата (вж. фигурата). **Видимата** за наблюдателя скорост, с която станцията се движи на фона на звездното небе е равна на ъгловата скорост β , с която се завърта зрителният лъч $\vec{OS}$. Получете израз за β чрез T , R , h и моментната стойност на θ . **[3.5 т]**



Г) Получете израз за отношението β_z/β_h на видимата скорост β_z на станцията, когато минава през зенита (вертикално над наблюдателя) към видимата ѝ скорост β_h в момента, когато се намира на хоризонта. **[1.5 т]**

Д) В момента, когато станцията минава през зенита, вертикално над наблюдателя на височина $h_1 = 10 \text{ km}$ прелита и самолет със скорост $v_1 = 300 \text{ m/s}$. Подобно на станцията, самолетът изглежда като малка движеща се точка. Кой от двата летателни апарата, станцията или самолетът, изглежда че се движи по-бързо? **[1.0 т]**

Задача 2. Лазер на свободни електрони



На фигурата е показано принципното устройство на лазер, който работи със свободни електрони. Сноп електрони, ускорени до висока енергия, попада между две

успоредни редици магнити с алтернативно ориентирани полюси – т.нар. **ондулатор**. Разстоянието между центровете на съседните магнити е $d = 1.0$ cm. Поради магнитните сили, електроните се движат по вълнообразна траектория, излъчвайки електромагнитни вълни. При релативистки скорости на електроните, лъчението е насочено почти изцяло в посоката на оста X .

А) Траекторията на електроните в ондулатора е синусоида, която лежи в равнината XY :

$$(1) \quad y(x) = A \sin(kx + \phi)$$

където A , k и ϕ са съответно амплитудата, вълновият вектор и началната ѝ фаза.

Получете израз за вълновия вектор k и пресметнете числената му стойност. **[1.0 т]**

Б) Електроните навлизат в ондулатора със скорост v . Определете компонентите на ускорението на електроните като функция на A , d и v в точки от траекторията с координати $y = 0$ и $y = +A$. **[2.5 т]**

В) Електроните в ондулатора извършват трептене в направление на оста Y . При амплитуди A , малки в сравнение с разстоянието d между магнитите, периодът на трептенето може да бъде записан приблизително във вида:

$$(2) \quad T = T_0 \left(1 + \alpha \left(\frac{A}{d} \right)^2 \right)$$

където T_0 и α са параметри, които зависят само от d и v . Определете T_0 и α . **[1.0 т]**

Г) Намерете дължината λ на електромагнитната вълна, излъчена в посока на оста X .

[1.5 т]

Д) Можете да приемете, че магнитната индукция в равнината на траекторията е насочена вертикално (по оста Z) и зависи от координатата X по закона:

$$(3) \quad B_z = B_0 \sin(kx)$$

където B_0 е амплитудата на магнитната индукция в ондулатора

На колко е равна фазата ϕ в уравнението (1) на траекторията? Посочете верния според вас отговор: $\phi = 0$; $\pi/2$; π ; $3\pi/2$ като го обосновайте кратко. **[0.5 т]**

Е) Получете израз за амплитудата A на траекторията.

Пресметнете A числено за електрони с кинетична енергия $E_k = 50$ MeV и при амплитуда на магнитната индукция в ондулатора $B_0 = 0.15$ T. **[2.5 т]**

Ж) Пресметнете дължината λ на вълната, излъчена в посока на оста X при тази енергия на електроните. В кой диапазон на електромагнитния спектър се намира лъчението?

[1.0 т]

Фундаментални константи

Скорост на светлината, $c = 3.0 \times 10^8$ m/s;

Елементарен заряд, $e = 1.6 \times 10^{-19}$ C

Маса в покой на електрона, $m = 9.1 \times 10^{-31}$ kg.

Полезна формула: $(1 + \delta)^n \approx 1 + n\delta$ при $|\delta| \ll 1$

Задача 3. Радиоактивна планета

Кълбовидна планета с радиус $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ е съставена от вещество с плътност $\rho = 5.5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$, еднаква в твърдо и в течно състояние. Веществото съдържа малки количества изотопи ${}^{238}_{92}\text{U}$ и ${}^{232}_{90}\text{Th}$, които търпят α -разпадане.* Периодите $T_{1/2}$ на полуразпадане и относителните масови концентрации c на двата изотопа са дадени в таблицата. След първото α -разпадане следва поредица значително по-бързи ядрени разпадания, докато се образуват стабилни изотопи на оловото. Сумарната енергия E , отделена в цялата поредица разпадания на дадено ядро, също е дадена в таблицата.

Изотоп	$T_{1/2}$ (10^9 години)	E (MeV)	c (kg изотоп/kg вещество)
${}^{238}_{92}\text{U}$	4.5	47.5	3.1×10^{-8}
${}^{232}_{90}\text{Th}$	14.0	41.8	1.2×10^{-7}

Отделената при разпаданията енергия води до загряване на веществото, поради което вътрешността на планетата е разтопена, а само тънка външна обвивка (кора) се намира в твърдо състояние. Теплопроводността на твърдата кора е $k_s = 2.9 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$, а на разтопената вътрешна част $k_m = 38.0 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.**

А) Изчислете обемната плътност q (в единици W/m^3) на топлинната мощност, отделяща се във веществото поради радиоактивните разпадания. [2.0 т]

Б) Планетата няма атмосфера и е разположена далече от всякакви други източници на топлина. Можете да приемете, че повърхността ѝ излъчва като абсолютно черно тяло и температурата на Космоса е 0 K. Пресметнете температурата T_s на повърхността на планетата. [1.5 т]

В) На малка дълбочина h ($h \ll R$) под повърхността на планетата температурата на твърдата кора се променя приблизително по линеен закон: $T(h) \approx T_s + Ah$. Получете израз за константата A посредством q и другите известни параметри, и пресметнете числената ѝ стойност. [2.5 т]

Г) Определете дебелината d на твърдата кора на планетата. Приемете, че температурата на топене на веществото, изграждащо планетата, е $T_m = 1500 \text{ K}$. [1.0 т]

Д) Температурата $T(r)$ в разтопената вътрешна част зависи от разстоянието r до центъра на планетата по закона: $T(r) = T_c - B(r/R)^2$. Определете константата B и пресметнете температурата T_c в центъра на планетата. [3.0 т]

Основни константи:

Число на Авогадро, $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Елементарен заряд, $e = 1.60 \times 10^{-19} \text{ C}$

Константа на Стефан-Болцман, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

*Приемете, че относителните атомни маси на двата изотопа са равни на масовите им числа.

**Теплопроводността k на дадено вещество се дефинира посредством закона на Фурие за преноса на топлина: $Q = -k \frac{dT}{dx} St$, където Q е количеството топлина, преминало за време t през площ S , перпендикулярна на посоката x , в която се променя температурата T . Знакът минус показва, че топлината се пренася в посока от по-висока към по-ниска температура.