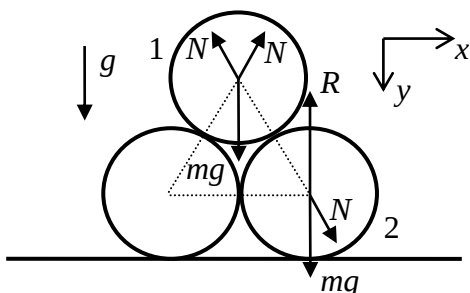


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално състезание по физика, Шумен, 11 април 2012 г.
Специална тема – решения на задачите

Задача 1. Пирамида от цилиндри.



а) Силите, действащи на горния цилиндър - (1) и десния цилиндър - (2), са нарисувани на фигурата. Очевидно ускорението a_2 е хоризонтално, докато от съображения за симетрия ускорението a_1 е вертикално. Следователно

$$mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}N = ma_1 \quad (1.1) \quad [0,25 \text{ т.}]$$

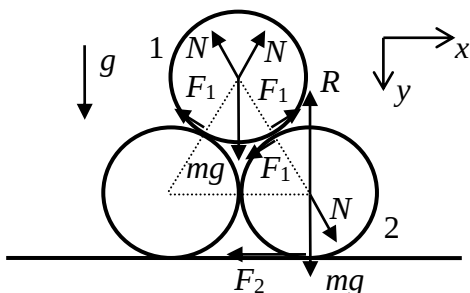
$$\frac{N}{2} = ma_2 \quad (1.2) \quad [0,25 \text{ т.}]$$

Тъй като цилиндрите се допират, при преместване на цилиндър 1 надолу на Δy ,

цилиндър 2 се премества надясно на Δx , като $(r + \Delta x)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}2r - \Delta y\right)^2 = (2r)^2$ [0,25 т.],

откъдето $r^2 + 2r\Delta x + \Delta x^2 + 3r^2 - 2\sqrt{3}r\Delta y + \Delta y^2 = 4r^2$. След пренебрегване на вторите степени на малките премествания и опростяване се получава $\Delta x = \sqrt{3}\Delta y$. Следователно и $v_2 = \sqrt{3}v_1$, откъдето и $a_2 = \sqrt{3}a_1$ [0,25 т.] (1.3). Замествайки (1.3) в (1.2) и решавайки

системата уравнения (1.1) и (1.2), се получава $a_1 = \frac{g}{7}$ [0,5 т.], $a_2 = \frac{\sqrt{3}g}{7}$ [0,5 т.].



б) след като цилиндрите са в покой, резултантната сила и въртящ момент, действащи на всеки един от тях, трябва да са нула. За цилиндър 1:

$$(\text{по } y) \quad mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}N - 2\frac{F_1}{2} = 0 \quad (1.4), \quad F_1 \leq kN \quad (1.5)$$

За цилиндър 2:

$$(\text{по } x) \quad \frac{N}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - F_2 = 0 \quad [0,25 \text{ т.}] \quad (1.6), \quad F_2 \leq kR \quad (1.7),$$

$$(\text{по } y) \quad mg + \frac{\sqrt{3}}{2}N + \frac{F_1}{2} - R = 0 \quad [0,25 \text{ т.}] \quad (1.8), \quad (\text{няма въртене}) \quad F_2 \cdot r - F_1 \cdot r = 0 \quad [0,25 \text{ т.}] \quad (1.9).$$

От (1.9) следва, че $F_1 = F_2 = F$ [0,25 т.]. Замествайки в (1.6) се получава

$$N = (2 + \sqrt{3})F \leq (2 + \sqrt{3})kN \quad (1.10) \quad [0,25 \text{ т.}], \quad \text{откъдето } k \geq \frac{1}{2 + \sqrt{3}} \approx 0,268 \quad [0,5 \text{ т.}]. \text{ Остава}$$

да се провери, че при такива стойности на k е изпълнено и (1.7). Замествайки (1.10) в (1.8) се получава $mg + N = R$, следователно, когато F_1 е сила на триене при покой, F_2 също е сила на триене при покой. [0,25 т.]

в) Използвайки чертежа от подусловие б), написваме уравненията за движение на цилиндрите 1 и 2:

(за 1 по у) $mg - 2\frac{\sqrt{3}}{2}N - 2\frac{F_1}{2} = ma_3$ (1.11) [0,25 т.]

(за 2 по х) $\frac{N}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}F_1 - F_2 = ma_4$ (1.12) [0,25 т.]

(за 2 по у) $mg + \frac{\sqrt{3}}{2}N + \frac{F_1}{2} - R = 0$ (1.13) [0,25 т.]

$F_1 = kN$ (1.14), $F_2 = kR$ (1.15), и кинематичното условие от подусловие а) $a_4 = \sqrt{3}a_3$ (1.16). (общо [0,25 т.]

Замествайки (1.14) в (1.11) се получава $N = \frac{m(g - a_3)}{k + \sqrt{3}}$ (1.17) [0,5 т.]. Замествайки (1.14),

(1.15) и (1.16) в (1.12) и (1.13), след преобразувания се получава:

$(1 - \sqrt{3}k)N - 2kR = m2\sqrt{3}a_3$ (1.12a) [0,5 т.]

$2kmg + k(k + \sqrt{3})N - 2kR = 0$ (1.13a). [0,5 т.]

Изваждайки (1.13a) от (1.12a) и замествайки N с изрази от (1.17), след преобразувания се получава

$a_3 = g \frac{3k^2 + 4\sqrt{3}k - 1}{k^2 - 7}$ (1.18) [0,5 т.] и $a_4 = \sqrt{3}a_3$.

г) ускоренията a_3 и a_4 в подусловие в) са получени при допускане, че има хлъзгане както между цилиндрите, така и между цилиндрите и хоризонталната повърхност. Условието за хлъзгане между цилиндрите и хоризонталната повърхност е: $\varepsilon < a_4$ (1.19) [0,5 т.], където ε е ъгловото ускорение на цилиндър 2. То може да се получи от уравнението за въртеливото движение на цилиндър 2:

$F_2r - F_1r = I\varepsilon$ [0,25 т.] (1.20), където $I = \frac{1}{2}mr^2$ (инерчен момент на еднороден

цилиндър). Използвайки (1.14), (1.15), (1.16) и (1.19), (1.20) се преобразува до

$k(R - N) < \frac{\sqrt{3}}{2}ma_3$ [0,25 т.] (1.20a). Замествайки (1.18) в (1.17) се получава

$N = \frac{2mg(k + \sqrt{3})}{7 - k^2}$ (1.21) [0,25 т.]. Използвайки (1.13a), се получава $R = mg + \frac{k + \sqrt{3}}{2}N$

[0,25 т.], и оттам, отчитайки (1.21): $R - N = mg + \frac{(k + \sqrt{3} - 2)2mg(k + \sqrt{3})}{2(7 - k^2)}$ [0,5 т.] (1.22).

Замествайки (1.22) в (1.20a) и отчитайки (1.18), след преобразувания се получава неравенство за k : $(7\sqrt{3} - 4)k^2 + 4(8 - \sqrt{3})k - \sqrt{3} < 0$ (1.23) [0,5 т.]. Тъй като k е положително, неравенството е изпълнено за $k \in (0, k_1)$, където

$k_1 = \frac{-2(8 - \sqrt{3}) + \sqrt{17^2 - 4 \cdot 17 \cdot \sqrt{3}}}{7\sqrt{3} - 4} \approx 0,0676$. [0,5 т.]

Задача 2. Брауново движение

А) Движението на центъра на масата на частицата е свързано с три степени на свобода и следователно средната кинетична енергия на това движение е:

(1) $\bar{E}_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{3}{2}k_B T$

Като вземем предвид приближението за средната скорост:

(2) $\bar{v}^2 \approx (\bar{v})^2$,

получаваме:

$$(3) \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}}$$

Понеже:

$$(4) \quad m = \frac{\pi \rho d^3}{6},$$

намираме:

$$(5) \quad \bar{v} = \sqrt{\frac{18k_B T}{\pi \rho d^3}} = 4.9 \times 10^{-3} \text{ m/s}.$$

Б) Общото преместване на частицата след N удара е:

$$(6) \quad \vec{R} = \vec{l}_1 + \dots + \vec{l}_N,$$

където $\vec{l}_i$ е векторът на преместване от N -тия до $N+1$ -вия удар, като по модул $l_i = l$.

Повдигаме равенството на квадрат и получаваме:

$$(7) \quad R^2 = Nl^2 + \sum_{i,j} \vec{l}_i \cdot \vec{l}_j.$$

Понеже $\vec{l}_i \cdot \vec{l}_j = l^2 \cos \theta$, а θ приема случайни стойности от 0° до 180° , следва, че $\cos \theta$ приема случайни стойности от -1 до $+1$. Следователно:

$$(8) \quad \overline{\cos \theta} = 0.$$

Това означава, че средностатистически двойната сума от формула (15) е нула. Тогава за средното преместване след N удара имаме:

$$(9) \quad \overline{R_N^2} = Nl^2$$

или в рамките на приетото приближение:

$$(10) \quad \overline{R_N} = l\sqrt{N}$$

В) За време t частицата претърпява:

$$(11) \quad N = t/\tau$$

удара. От друга страна, средното време между два удара е:

$$(12) \quad \tau = l/\bar{v}.$$

Следователно зависимостта (9) се записва като следната функция на времето:

$$(13) \quad \overline{R^2(t)} = l\bar{v}t$$

Отчитаме по графиките координатите на частиците в различните моменти от време и пресмятаме средния квадрат на преместването на трите частици:

$$(14) \quad \overline{R^2(t)} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 (x_i^2(t) + y_i^2(t))$$

Резултатите са нанесени в таблицата по-долу:

t (s)	X (μm)	Y (μm)	R^2 (μm^2)	$\langle R^2 \rangle$ (μm^2)	D ($\mu\text{m}^2/\text{s}$)
100	0	5	25	1017	10.2
	10	-35	1325		
	40	-10	1700		
200	-45	25	2650	1850	9.3
	-25	15	850		
	-5	-45	2050		
300	0	-30	900	4508	15.0
	60	-50	6100		
	75	-30	6525		
400	-45	15	2250	5175	12.9

	-45	-35	3250		
	-5	-100	10025		

Определянето на l може да стане по два начина.

I начин

За всеки от четирите момента пресмятаме:

$$(15) \quad D = \frac{\overline{R^2(t)}}{t},$$

където $D = l\bar{v}$ и нанасяме резултатите в отделна колона на таблицата. Средната стойност на D за набора измервания е:

$$(16) \quad \bar{D} \approx 12 \mu\text{m}^2/\text{s} = 1.2 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s},$$

а средноквадратичната грешка:

$$(17) \quad \Delta D \approx 3 \mu\text{m}^2/\text{s} = 0.3 \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s},$$

т.е.

$$(18) \quad D = (1.2 \pm 0.3) \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s}.$$

Така определяме свободния пробег l :

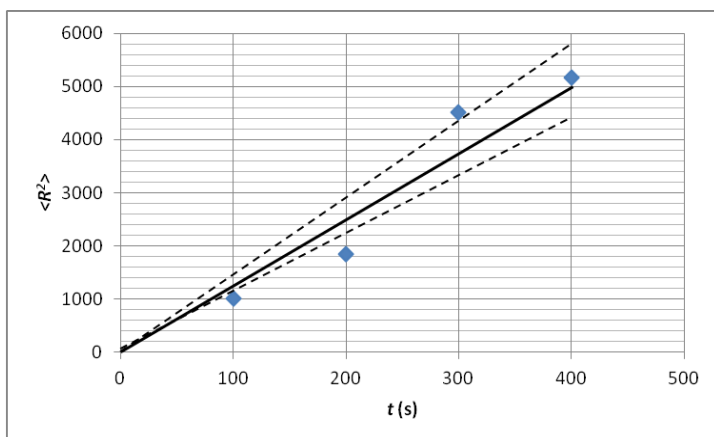
$$(19) \quad l = \frac{D}{\bar{v}} = (2.4 \pm 0.6) \times 10^{-9} \text{ m}$$

и средното време между ударите:

$$(20) \quad \tau = \frac{l}{\bar{v}} = (4.9 \pm 1.2) \times 10^{-7} \text{ s}$$

II начин

Представяме графично зависимостта на $\overline{R^2}$ от t и прекарваме по данните права линия, минаваща през координатното начало.



Определяме D като коефициент на наклона на правата:

$$(21) \quad D = (1.3 \pm 0.2) \times 10^{-11} \text{ m}^2/\text{s},$$

а стойностите на l и на τ , както по първия начин:

$$(22) \quad l = \frac{D}{\bar{v}} = (2.7 \pm 0.4) \times 10^{-9} \text{ m}$$

$$(23) \quad \tau = \frac{l}{\bar{v}} = (5.5 \pm 0.8) \times 10^{-7} \text{ s}$$

Схема на оценяване на задача 2

Елемент от решението / подусловие	Точки
Прилага формулата за средна кинетична енергия с 3 степени на свобода	1.0
Изразява масата на частицата чрез плътността и диаметъра	0.5
Получава израз за средната скорост	1.0
Пресмята числено средната скорост	0.5
Общо по т. А	3.0
Представя общото преместване като сума от елементарни премествания	0.5
Получава израз за квадрата на преместването	1.0
Обосновава, че $\overline{\cos\theta} = 0$	1.0
Получава израз за средното преместване	0.5
Общо по т. Б	3.0
Изразява $\overline{R^2}$ като функция на t , l и v	0.5
Снема данни за координатите и ги подрежда в таблица	1.2
Пресмята средни стойности на R или на R^2	0.4
Обработва данните таблично или графично, за да пресметне D	0.5
Обработва данните таблично или графично, за да пресметне ΔD	0.2
Определя l	0.4
Определя Δl	0.2
Определя τ	0.4
Определя $\Delta \tau$	0.2
Общо по т. В	4.0
Общо за задачата	10.0

Задача 3. Затихващи електромагнитни трептения.

а) за правилно начертана схема [0,5 т.]. Напрежението $U_0 = E = 10,0 \text{ V}$ [0,25 т.], а токът $I = E / R = 1,00 \text{ A}$. [0,25 т.]

б) при пренебрегване на съпротивлението R , трептенията са незатихващи. Следователно периодът $T = 2\pi\sqrt{LC} \approx 0,628 \text{ ms}$, [0,5 т.] а от законът за запазване на енергията

$$\frac{1}{2}CU_0^2 + \frac{1}{2}LI_0^2 = \frac{1}{2}CU_{\max}^2 = \frac{1}{2}LI_{\max}^2, \text{ откъдето } U_{\max} = \sqrt{U_0^2 + \frac{LI_0^2}{C}} \approx 1000 \text{ V}, [0,75 \text{ т.}], \text{ а}$$

$$I_{\max} = \sqrt{I_0^2 + \frac{CU_{\max}^2}{L}} \approx 1,00 \text{ A}. [0,75 \text{ т.}]$$

в) ако $x(t) = Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi)$, то $\frac{dx}{dt} = -\kappa Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi)$, [0,25 т.] а

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \kappa^2 Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) + \kappa\omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi) + \kappa\omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi) - \omega^2 Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= (\kappa^2 - \omega^2)Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) + 2\kappa\omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi). [0,25 \text{ т.}] \end{aligned}$$

Замествайки в даденото уравнение, се получава:

$$\begin{aligned} &(\kappa^2 - \omega^2)Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) + 2\kappa\omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi) + \\ &+ 2\beta[-\kappa Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) - \omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi)] + \omega_0^2 Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) = 0 \end{aligned}$$

След опростяване на уравнението:

$$(\kappa^2 - \omega^2 - 2\beta\kappa + \omega_0^2)Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi) + 2(\kappa - \beta)\omega Ae^{-\kappa t} \sin(\omega t + \varphi) = 0. [0,25 \text{ т.}]$$

Тъй като равенството трябва да е изпълнено за всеки момент време t , то това е възможно само, ако коефициентите пред тригонометричните функции са нули. [0,5 т.]

Тогава $\kappa = \beta$ [0,25 т.] и $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}$ [0,5 т.].

г) тъй като сумата на напреженията по затворен контур трябва да е нула:

$$U_C + U_L + U_R = \frac{q(t)}{C} + L \frac{dI}{dt} + RI = 0. \text{ [0,25 т.]} \text{ Понеже } I = \frac{dq}{dt}, \text{ получаваме}$$

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{1}{C} q = 0 \text{ или } \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{1}{LC} q = 0. \text{ [0,25 т.]} \text{ Използвайки решението от}$$

подусловие в), получаваме: $q(t) = Ae^{-\kappa t} \cos(\omega t + \varphi)$, където $\kappa = \frac{R}{2L}$ [0,25 т.], а

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2} \text{ [0,25 т.]. Периодът } T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{1}{LC} - \left(\frac{R}{2L}\right)^2}} \approx 0,628 \text{ ms [0,25 т.].}$$

За да изчислим началната фаза, първо намираме $q(0) = A \cos \varphi$ [0,25 т.], а

$\frac{dq}{dt}(0) = -A\kappa \cos \varphi - A\omega \sin \varphi$ [0,25 т.]. От тези две равенства намираме

$$\tan \varphi = -\frac{\frac{dq}{dt}(0)}{\kappa + \frac{dq}{dt}(0)} \text{ [0,25 т.]. Тъй като } q(0) = CE \text{ [0,25 т.], а } \frac{dq}{dt}(0) = -\frac{E}{R} \text{ [0,25 т.], то}$$

$$\tan \varphi \approx 100 \text{ [0,25 т.], } \varphi \approx 89,4^\circ \text{ [0,25 т.].}$$

д) тъй като в определени моменти t_i от време кондензаторът е зареден до максимални стойности и токът в тези моменти е нула, то енергията на системата в тези моменти

време ще бъде $W(t_i) = \frac{q(t_i)^2}{2C}$ [0,25 т.], следователно енергията на системата ще зависи

от времето така: $W(t) = W(0)e^{-\frac{R}{L}t}$ [0,25 т.]. Енергията ще намалее 2 пъти за време

$$\tau = \frac{L}{R} \ln 2 \approx 6,93 \text{ ms} \approx 11,0 T. \text{ [0,5 т.]}$$

е) Графиката на зависимостта на напрежението $U(t)$ на кондензатора от времето изглежда така: [1 т.]

