

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика

Велико Търново, 26 февруари 2011 г.

Специална тема

Задача 1. Индуциран заряд върху сфери

Част 1. а) и б) Системата от двете сфери и проводника се явява екипотенциална система, така че, поставена в електрично поле, на лявата сфера се натрупват отрицателни заряди $-q$, а на дясната сфера - положителни заряди q (от закона за запазване на зарядите $\Rightarrow$ зарядите са равни по големина) [0,5т].

Тъй като радиусът на сферите R е много по-малък от разстоянието между сферите L , то потенциалът, създаден от зарядите на всяка сфера не оказва влияние върху потенциала, създаден от зарядите на другата сфера [0,5т].

По упътване сферите са зареждат хомогенно $\Rightarrow$ потенциалът, създаден върху лявата сфера ще е като на точков заряд

$$\varphi_{\text{л}} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ [0,5т].}$$

аналогично на дясната сфера

$$\varphi_{\text{д}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ [0,5т].}$$

Потенциалната разлика трябва да се компенсира с потенциалната разлика, създадена от външното електрично поле $\Rightarrow$

$$EL = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 2\pi\epsilon_0 REL \text{ [1т].}$$

в) токът, който протича при спиране на външното електрично поле, можем да изразим като производна на заряда по времето

$$I = \frac{dq}{dt} \text{ [0,5т].}$$

От друга страна, от закона на Ом имаме

$$I = \frac{\varphi_{\text{д}} - \varphi_{\text{л}}}{r} = \frac{q}{r2\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow \frac{dq}{dt} = \frac{q}{r2\pi\epsilon_0 R} \text{ [0,5т].}$$

$\Rightarrow$ зарядът на сферите ще намалее e - пъти ($e = 2,7182818$ е Неперовото число), когато:

$$\ln\left(\frac{q}{q/e}\right) = \frac{t}{r2\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow t = 2\pi\epsilon_0 Rr \text{ [1т].}$$

Част 2. г), д) и е) Когато имаме три сфери, от съображение на симетрия, зарядът в лявата и дясната сфера трябва да са равни по големина и противоположни по знак, докато средната сфера не трябва да е заредена [1т].

Отново потенциалът, създаден върху всяка от сферите, ще е като на точков заряд $\Rightarrow$

$$\varphi_{\text{л}} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ [0,5т].}$$

аналогично на дясната сфера

$$\varphi_{\text{д}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} \text{ [0,5т].}$$

Потенциалната разлика трябва да се компенсира с потенциалната разлика, създадена от външното електрично поле $\Rightarrow$

$$E2L = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 4\pi\epsilon_0 REL \text{ [1т]}.$$

Част 3. ж) Тъй като се интересуваме само от заряда на двете крайни сфери, то задачата се решава аналогично.

Отново потенциалът, създаден върху всяка от крайните сфери, ще е като на точков заряд $\Rightarrow$

$$\varphi_{\text{вн}} = \frac{-q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

аналогично на най-дясната сфера

$$\varphi_{\text{вн}} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R}$$

Потенциалната разлика между първата и последната сфера трябва да се компенсира с потенциалната разлика, създадена от външното електрично поле $\Rightarrow$

$$E(N-1)L = \frac{2q}{4\pi\epsilon_0 R} \Rightarrow q = 2\pi\epsilon_0 REL(N-1) \text{ [2т]}.$$

Задача 2. Йо-йо

Част 1. а) Има две сили, действащи на Йо-йото: сила на опън от страна на края и гравитационната сила (Фигура 1а.). Ускоряването на Йо-йото зависи от тези две сили:

$$aM = Mg - T \text{ [0,5т]}.$$

Въртеливото движение на Йо-йото се определя от въртящия момент, създаден от силата на опън T (въртящият момент на гравитационната сила е равен на нула):

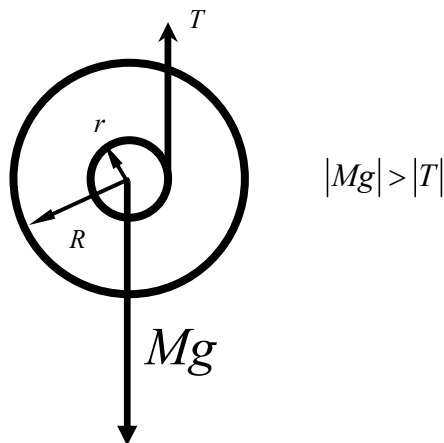
$$\alpha I = Tr \text{ [0,5т]}.$$

Връзката между ъгловото ускорение α и линейното ускорение a е

$$a = \alpha r \text{ [1т]}.$$

Сега можем да изразим силата на опън от страна на края и ъгловото ускорение и тогава за линейното ускорение имаме:

$$a = \frac{g}{1 + \frac{I}{Mr^2}} \text{ [1т]}.$$



Фигура 1а.

б) Имаме равноускорително движение без начална скорост с ускорение $a \Rightarrow$

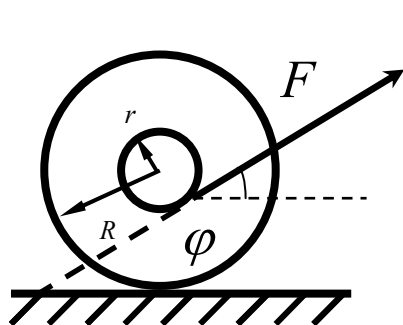
$$V = \sqrt{2aL} = \sqrt{\frac{2gL}{1 + \frac{I}{Mr^2}}} \text{ [2т]}.$$

в) От връзката между ъгловата скорост и линейната скорост $\Rightarrow$

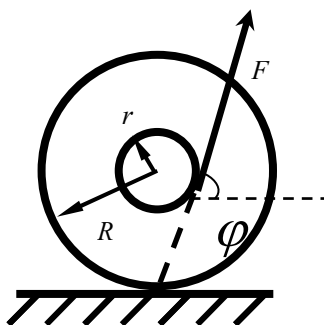
$$\Omega = V / r = \sqrt{\frac{2gL}{r^2 + \frac{I}{M}}} [1\tau].$$

Част 2. Анализът на Йо-йото е най-лесен, ако изчислявате въртящите моменти в точката на контакт между Йо-йото и масата. Тъй като силата на триене е приложена в точката на контакт, то тя не създава въртящ момент, въртящ момент има само силата F .

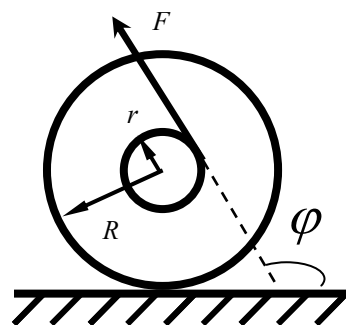
г) Когато дърпаме края хоризонтално, въртящият момент спрямо точката на контакт е по часовниковата стрелка и Йо-йото се движи надясно и по часовниковата стрелка. [1т]



Фигура 1б.



Фигура 1в.



Фигура 1г.

д) За да видим какво се случва, когато дърпаме края под ъгъл φ , нека да продължим направлението на силата, докато достигне повърхността на масата. В случай, че удължаването е от лявата страна на точката на допир, както на Фигура 1б, въртящият момент е все още по часовниковата стрелка и Йо-йото все още се движи надясно и по часовниковата стрелка. В случай че продължението на силата F минава през точката на контакт (Фигура 1в), въртящият момент става нула и Йо-йото спира да се търкаля. Ако продължението на силата мине отдясно на точката на допир (Фигура 1г), то въртящият момент е обратно на часовниковата стрелка и Йо-йото започва да се движи наляво и се върти обратно на часовниковата стрелка. [1т]

Критичният ъгъл лесно се определя от геометрията на Фигура 1в $\Rightarrow$

$$\cos \varphi = \frac{r}{R} [2\tau].$$

Задача 3. Повърхностно напрежение

Част 1. а) Тъй като в условието на задачата е казано, че бурканът е изцяло напълнен с несвиваема вода и е херметически затворен, то общият обем няма как да се промени. Тогава общият обем на двата мехура е равен на обема на новообразувалия се мехур $\Rightarrow$

$$2 \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow R = R_0 2^{1/3} [1\tau]$$

б) Нека да напишем условието за равновесие на мехурите преди да се слоят. Това условие е равенство на наляганията вътре и вън на мехурите:

$$P_{\text{мех}} = P_0 + \rho gh + \frac{2\sigma}{R_0} [1\tau],$$

Тук ρgh е хидростатичното налягане на дъното на буркан с височина h .

Тъй като газа в мехурчетата считаме за идеален, процеса на сливане за изотермен, а обемът не се променя, както показвахме в предишната точка, то остава и налягането вътре в новообразувалия се мехур да не се променя $\Rightarrow$

$$P_{\text{мех}} = P_1 + \rho gh + \frac{2\sigma}{R} \text{ [1т]}.$$

Тогава търсеното изменение на налягането при гърлото на буркана ΔP е:

$$\Delta P = P_1 - P_0 = \frac{2\sigma}{R_0} - \frac{2\sigma}{R} \Rightarrow \Delta P = \frac{2\sigma}{R_0} \left(1 - \frac{1}{2^{1/3}} \right) \approx 0.4 \frac{\sigma}{R_0} \text{ [1т]}$$

Част 2. По време на сливането температурата на газа в мехурчетата не се променя, запазва се още и общата маса на газа от двата мехура $\Rightarrow$

$$m_0 = m_1 + m_2, \text{ [0,5т]}$$

тук m_0, m_1 и m_2 са масите на газа в съответните мехури. От закона за идеален газ имаме:

$$m_i = \frac{P_i V_i \mu}{RT} \quad i = 0, 1, 2 \text{ [0,5т]}$$

тук μ е моларната маса на идеалният газ в мехурите. Условието за равновесие на мехурите е равенство на наляганията вътре и вън на мехурите:

$$P_i = P_{\text{ат.}} + 2 \frac{2\sigma}{R_i} \quad i = 0, 1, 2 \text{ [0,5т]}$$

където коефициентът 2 във втория член отчита, че сапуненият мехур има вътрешна и външна стена (за разлика от предишната част на задачата).

Обема на всеки мехур изразяваме от формула за обем на сфера:

$$V_i = \frac{4}{3} \pi R_i^3 \quad i = 0, 1, 2 \text{ [0,5т]}$$

Замествайки всичко в уравнението за масите $\Rightarrow$

$$\left(P_{\text{ат.}} + \frac{4\sigma}{R_0} \right) R_0^3 = \left(P_{\text{ат.}} + \frac{4\sigma}{R_1} \right) R_1^3 + \left(P_{\text{ат.}} + \frac{4\sigma}{R_2} \right) R_2^3$$

Или, окончателно за коефициента на повърхностно напрежение σ за сапунения разтвор имаме:

$$\sigma = \frac{P_{\text{ат.}}}{4} \frac{R_0^3 - R_1^3 - R_2^3}{R_1^2 + R_2^2 - R_0^2} \text{ [1т]}$$

Част 3. Тъй като се пренебрегва топлинното разширение на живака, то обемът се запазва

$$\Rightarrow 2 \frac{4}{3} \pi R_0^3 = \frac{4}{3} \pi R^3 \Rightarrow R = R_0 2^{1/3} \text{ [1т]}$$

Намаляването на площта означава намаляване на енергията на повърхностното напрежение, която е за сметка на повишаването на температурата на новообразуваната капчица живак $\Rightarrow$

$$4\pi\sigma(2R_0^2 - R^2) = 2\rho \frac{4}{3} \pi R_0^3 c(T - T_0) \Rightarrow \text{[1т]}$$

$$T = T_0 + \frac{3\sigma}{2\rho c R_0^3} (2R_0^2 - R^2) \Rightarrow T = T_0 + \frac{3\sigma}{2\rho c R_0^3} (2 - 2^{2/3}) \Rightarrow \text{[1т]}$$