

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, Пловдив, 13 - 14 март 2010 г.
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Подскачане на топче за тенис на маса.

а) Нека скоростта на топчето след първия удар да е v_1 , след втория удар – v_2 , а след n -ия удар – v_n . Тогава скоростта след първия удар е $v_1 = kv_0$, след втория удар е $v_2 = kv_1 = k^2v_0$, а след n -ия удар е $v_n = kv_{n-1} = k^n v_0$ [0,5 т]. Съответно времето между първия и втория удар е $t_{1-2} = \frac{2v_1}{g} = \frac{2kv_0}{g}$,

между втория и третия удар е $t_{2-3} = \frac{2v_2}{g} = \frac{2k^2v_0}{g}$, а между $n-1$ -ия и n -ия удар е

$t_{n-1-n} = \frac{2v_n}{g} = \frac{2k^{n-1}v_0}{g}$ [0,5 т]. Общото време между първия и n -ия удар е

$$T_{1-n} = t_{1-2} + t_{2-3} + \dots + t_{n-1-n} = \frac{2v_0}{g} (k + k^2 + \dots + k^{n-1}) = \frac{2v_0k}{g} (1 + k + \dots + k^{n-2}) = \frac{2v_0k(1-k^{n-1})}{g(1-k)}$$

[0,5т].

Следователно времето от първия удар до пълното спиране на топчето върху повърхността е

$$T_{1-\infty} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2v_0k(1-k^{n-1})}{g(1-k)} = \frac{2v_0k}{g(1-k)} \quad [0,5 \text{ т}].$$

б) от приложената фигура могат да се измерят моментите време на голям брой удари. В по-долната таблица са дадени тези моменти време за първите 25 удара (измерени с точност 10 ms) [0,5 т].

№ на удар	Време на n -ия удар t_n , ms	$t_n - t_{n-1}$, ms	$\lg(t_n - t_{n-1})$	$\frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1} - t_{n-2}}$	№ на удар	Време на n -ия удар t_n , ms	$t_n - t_{n-1}$, ms	$\lg(t_n - t_{n-1})$	$\frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1} - t_{n-2}}$
1	260				14	2610	110	2.041	1.000
2	550	290	2.462		15	2720	110	2.041	1.000
3	810	260	2.415	0.897	16	2810	90	1.954	0.818
4	1050	240	2.380	0.923	17	2900	90	1.954	1.000
5	1270	220	2.342	0.917	18	2980	80	1.903	0.889
6	1470	200	2.301	0.909	19	3050	70	1.845	0.875
7	1660	190	2.279	0.950	20	3130	80	1.903	1.143
8	1830	170	2.230	0.895	21	3190	60	1.778	0.750
9	1990	160	2.204	0.941	22	3250	60	1.778	1.000
10	2130	140	2.146	0.875	23	3300	50	1.699	0.833
11	2260	130	2.114	0.929	24	3350	50	1.699	1.000
12	2390	130	2.114	1.000	25	3400	50	1.699	1.000
13	2500	110	2.041	0.846					

(за таблицата [0,5 т]).

От тези моменти време могат да се получат две зависимости:

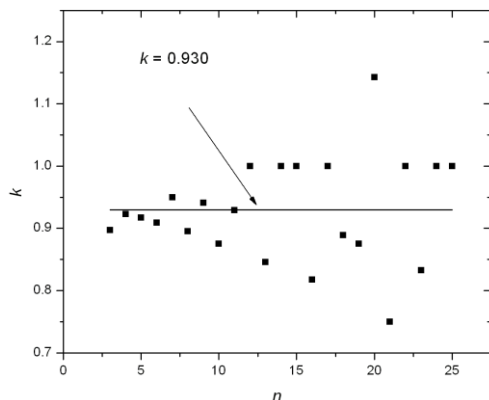
б1) (по-лесна и по-неточна) Отношенията на два съседни интервала време между последователни удари $\frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1} - t_{n-2}} = \frac{t_{n-1} - t_{n-2}}{t_{n-2} - t_{n-3}} = \frac{2k^{n-1}v_0}{2k^{n-2}v_0} = k$. Следователно, зависимостта $\frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1} - t_{n-2}} =$

$f(n)$ [0,5 т] трябва да е константа (хоризонтална права линия), равна на коефициента на възстановяване k . Зависимостта е дадена на Фиг.1. Стойността на получената константа е $k = 0.930$

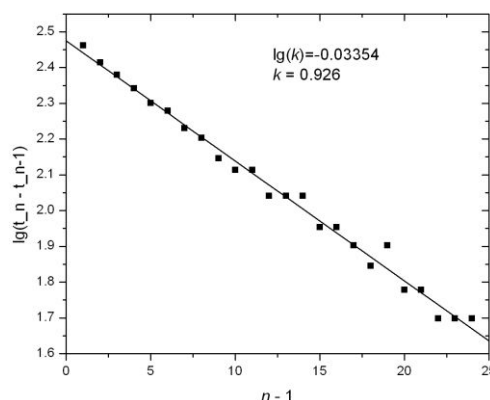
[1 т] (която може да се сметне и като средна стойност на всичките отношения $\frac{t_n - t_{n-1}}{t_{n-1} - t_{n-2}}$).

б2) (по-трудна и по-точна) Тъй като $t_{n-1-n} = \frac{2k^{n-1}v_0}{g}$, то $\lg(t_{n-1-n}) = \lg\left(\frac{2v_0}{g}\right) + \lg(k)(n-1)$.

Следователно зависимостта $\lg(t_{n-1-n}) = f(n-1)$ [0,5 т] е права линия с наклон $\lg(k)$. Тази зависимост е дадена на Фиг.2.



Фиг.1 [3,5 т]



Фиг.2 [3,5 т]

По този начин стойността на получената константа е $k = 0,926$ [1 т].

в) грешката по начина б1) е трудно да се оцени графично (но е от порядъка на 0,25). По начина б2) може да се оцени по метода на най-стръмната и най-хоризонталната права, минаващи през точките от графиката. Така се получава $k = 0,926 \pm 0,008$ [0,5 т].

г) от фигурата интервалът време $T_{1-\infty} = t_{\infty} - t_1 = 3,910 - 0,260 = 3,650$ s [0,5 т].

д) тъй като $T_{1-\infty} = \frac{2v_0k}{g(1-k)}$, а $h = \frac{v_0^2}{2g}$, то $h = \frac{gT_{1-\infty}^2}{8} \left(\frac{1-k}{k}\right)^2$ [0,3 т]. Замествайки с дадените и измерените стойности $h = 0,104$ m [0,2 т].

е) използвайки грешката за k , $\Delta k = \pm 0,008$, изчислявайки h съответно с най-малката и най-голямата стойност за k , намираме за $\Delta h \approx 0,025$ m [0,5 т].

Задача 2. Трансформатор на Тесла

A1) Единична кръгова навивка, по която тече ток I , създава през напречното си сечение поток на магнитното поле:

$$\Phi_0 = \mu_0 r (\ln(r/a) - 0.230) I$$

Когато токът тече по N_1 плътно допрени навивки, потокът през всяка една от тях е $\Phi = N_1 \Phi_0$, а общият поток през всички тях:

$$\Phi_1 = N_1 \Phi = N_1^2 \mu_0 r (\ln(r/a) - 0.230) I \quad [1.0 \text{ т}]$$

Индуктивността на намотката е $L_1 = \Phi_1 / I$ т.е.:

$$L_1 = N_1^2 \mu_0 r (\ln(r/a) - 0.230) \quad [0.5 \text{ т}]$$

A2) След заместване с числените стойности намираме:

$$L_1 = 8.31 \times 10^{-5} \text{ H} \quad [0.5 \text{ т}]$$

A3) От връзката $v = 1 / (2\pi \sqrt{L_1 C_1})$ намираме:

$$C_1 = \frac{1}{4\pi^2 v^2 L_1} \quad [1.0 \text{ т}]$$

B1) Магнитната индукция в дълъг соленоид е:

$$B = \mu_0 \frac{N_2}{l} I \quad [0.5 \text{ т}]$$

Магнитният поток през единична навивка е:

$$\Phi = BS = \mu_0 \frac{N_2 S}{l} I \quad [0.5 \text{ т}]$$

а през цялата намотка:

$$\Phi_2 = N_2 \Phi = \mu_0 \frac{N_2^2 S}{l} I \quad [0.5 \text{ т}]$$

Следователно индуктивността на вторичната намотка е:

$$L_2 = \mu_0 \frac{N_2^2 S}{l} \quad [0.5 \text{ т}]$$

Б2) Електричното поле над Земята е суперпозиция от полето, създадено от заряда $+q$ върху сферата и полето, създадено от заряда-образ $-q$. Ако приемем, че зарядът е разпределен равномерно върху сферата и $H \gg R$, за потенциала в центъра на сферата получаваме:

$$\varphi = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 R} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0 (2H)} = \frac{q(2H - R)}{8\pi\epsilon_0 RH} \quad [1.0 \text{ т}]$$

Понеже потенциалът на земната повърхност е нула, напрежението между сферата и Земята е $U = \varphi$, а капацитетът на системата сфера-Земя –

$$C_2 = \frac{q}{\varphi} = \frac{8\pi\epsilon_0 RH}{(2H - R)} = 3.52 \times 10^{-11} \text{ F} \quad [0.5 \text{ т}]$$

Б3) За да съвпадат собствените честоти на двата кръга, е необходимо $L_2 = 1/((2\pi\nu)^2 C_2)$, откъдето определяме броя на навивките във вторичната намотка:

$$N_2 = \frac{1}{2\pi\nu} \sqrt{\frac{l}{\mu_0 S C_2}} = 6549 \quad [0.5 \text{ т}]$$

В) При зареждането на кондензатора в него се натрупва енергия:

$$W = \frac{C_1 U_1^2}{2}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

След като кондензаторът е включен към първичната намотка, в първичния кръг възникват електромагнитни трептения, поради които във вторичната намотка се индуцира променлив ток. Постепенно енергията се предава от първичната във вторичната намотка, докато трептенията в първичната намотка затихнат. В този момент:

$$W = \frac{C_2 U_2^2}{2}, \quad [0.5 \text{ т}]$$

където U_2 е амплитудата на променливото напрежение във вторичната намотка. От закона за запазване на енергията:

$$\frac{C_1 U_1^2}{2} = \frac{C_2 U_2^2}{2}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

Следователно:

$$U_2 = U_1 \sqrt{\frac{C_1}{C_2}}. \quad [0.5 \text{ т}]$$

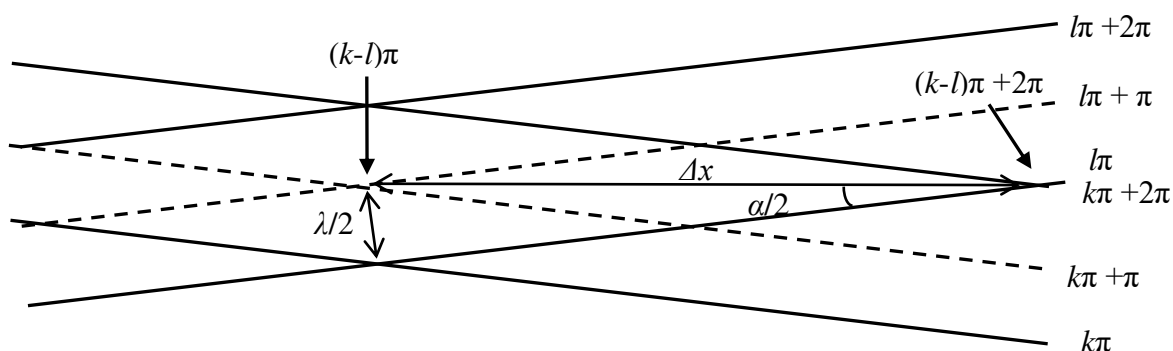
Като вземем предвид, че честотите на двата кръга съвпадат, получаваме:

$$U_2 = U_1 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = U_1 \frac{N_2}{N_1} \sqrt{\frac{S}{lr(\ln(r/a) - 0.230)}} \approx 294 \text{ kV} \quad [1.0 \text{ т}]$$

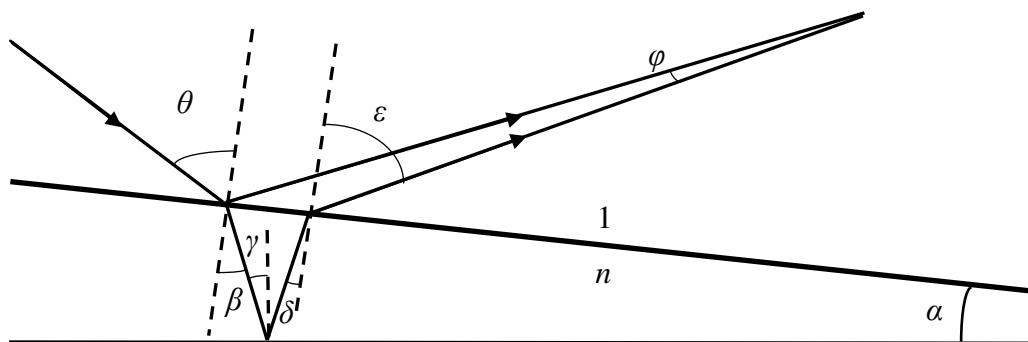
Задача 3. Интерференция от клин

а) Задачата може да се реши като граничен случай на интерференция на два точкови източника (схема на Юнг) или графично. Ако наблюдаваме интерференция от два точкови източника, излъчващи монохроматична светлина с дължина на вълната λ , и намиращи се на разстояние d един от друг, върху екран на разстояние L от тях, то разстоянието между

максимумите на екрана (в приближение $d \ll L$) е $\Delta x = \frac{\lambda L}{d}$. Ако $L \rightarrow \infty$ така, че $\frac{d}{L} = \text{const} = \alpha$, то сноповете стават успоредни и тогава $\Delta x = \frac{\lambda}{\alpha}$ [2,5 т]. Графично може да се реши, изследвайки чертежа, представен по-долу. Ако начертаете за двата снопа по три вълнови повърхности, различаващи се с фаза π , то се вижда от показания триъгълник, че $\frac{\lambda/2}{\Delta x} = \frac{\alpha}{2}$, откъдето $\Delta x_1 = \frac{\lambda}{\alpha}$ [2,5 т]. При дадените стойности $\Delta x_1 = \frac{500 \text{ nm}}{0.01^\circ} \approx 2,9 \text{ mm}$ [0,5 т].



б) Тъй като при пречупване и отражение успоредният сноп остава успореден, то в този случай ще се наблюдава пак интерференция на два успоредни снопа – единият отразен от горната повърхност на клина, а другият – от долната [0,5 т]. От чертежа по-долу следват следните връзки:



за правилен чертеж [0,5 т].

$\sin \theta / \sin \beta = n$, $\beta = \gamma + \alpha$, $\delta = \gamma - \alpha$, $\sin \varepsilon / \sin \delta = n$ и $\varphi = \theta - \varepsilon$ (за всяко уравнение [0,2 т]).

От по-горните уравнения и използвайки, че α е малък ъгъл, следва:

$$\sin \varepsilon = n \sin \delta = n \sin(\beta - 2\alpha) = n \sin \beta \cos(2\alpha) - n \cos \beta \sin(2\alpha) \approx n \sin \beta - n \cos \beta \cdot 2\alpha = \sin \theta - \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta} \cdot 2\alpha. \quad (3.1)$$

От друга страна

$$\sin \varepsilon = \sin(\theta - \varphi) = \sin \theta \cos \varphi - \cos \theta \sin \varphi \approx \sin \theta - \cos \theta \cdot \varphi \quad (3.2)$$

Приравнявайки (3.1) и (3.2) следва:

$$\varphi = \frac{2\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta} \quad [3,5 \text{ т}]. \quad \text{Използвайки резултата от първото подусловие}$$

$$\Delta x_2 = \frac{\lambda \cos \theta}{2\alpha \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta}} \quad [0,5 \text{ т}]. \quad \text{Замествайки с дадените стойности}$$

$$\Delta x_2 = \frac{500 \text{ nm} \cdot \cos 60^\circ}{2.0,001^\circ \sqrt{1,5^2 - \sin^2 60^\circ}} \approx 5,8 \text{ mm} [1 \text{ т}].$$