

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика

13 март 2010 г.

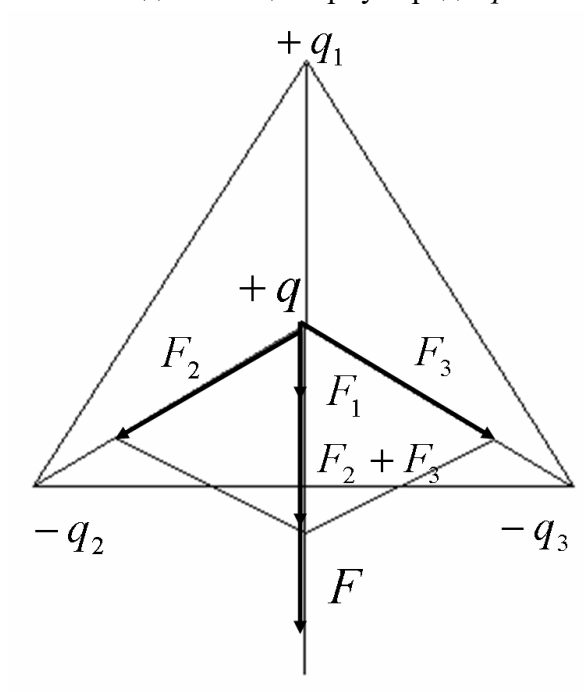
Тема 10 клас

1. Във върховете на равностранен триъгълник със страна $a = 6\text{ cm}$ са разположени заряди $q_1 = 6 \cdot 10^{-9}\text{ C}$, $q_2 = q_3 = -8 \cdot 10^{-9}\text{ C}$. Определете направлението и големината на силата действаща на заряд $q = 6,67 \cdot 10^{-9}\text{ C}$, намиращ се в центъра на триъгълника.

Коефициентът на пропорционалност в закона на Кулон е $k = 9 \cdot 10^9 \frac{\text{N} \cdot \text{m}^2}{\text{C}^2}$. Електричната

константа е $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}^2}{\text{N} \cdot \text{m}^2}$.

- а) Направете чертеж на който покажете силите действащи върху заряда q . Определете направлението на резултантната сила действаща върху заряда q . (2 точки)



- б) Определете разстоянието между заряда q и останалите заряди.

Тъй като триъгълника е равностранен, точката в която се намира заряда q дели височината му в отношение 2:1. Височината на равностранния триъгълник определяме чрез разглеждане на съответния правоъгълен триъгълник: $h^2 = a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2 \Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$. Следователно,

разстоянието между заряда q и върховете на триъгълника е: $r = \frac{2}{3}h = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{1}{\sqrt{3}}a$. Квадратът

на това разстояние е $r^2 = \frac{a^2}{3}$.

(1 точка)

в) Определете големините на силите действащи върху заряда q .

$$F_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{r^2} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_1}{a^2} = 3 \left(9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(6,67 \cdot 10^{-9} C)(6 \cdot 10^{-9} C)}{(6 \cdot 10^{-2} m)^2} = 3 \cdot 10^{-4} N;$$

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_2}{r^2} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_2}{a^2} = 3 \left(9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(6,67 \cdot 10^{-9} C)(8 \cdot 10^{-9} C)}{(6 \cdot 10^{-2} m)^2} = 4 \cdot 10^{-4} N;$$

$$F_3 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_3}{r^2} = \frac{3}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_3}{a^2} = 3 \left(9 \cdot 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2} \right) \frac{(6,67 \cdot 10^{-9} C)(8 \cdot 10^{-9} C)}{(6 \cdot 10^{-2} m)^2} = 4 \cdot 10^{-4} N \quad (2 \text{ точки})$$

г) Сравнете големините на силите $F_2 + F_3$ и F_2 (или F_3)

Получава се равнобедрен триъгълник със страни $F_2 + F_3$, F_2 и F_3 . Следователно, големината на $F_2 + F_3$ е равна на големината на F_2 (или F_3) (2 точки)

д) Намерете големината на резултантната сила действаща върху заряда q

Посоките на силите F_1 и $F_2 + F_3$ съвпадат. Следователно, големината на резултантната сила действаща върху заряда q е равна на сумата от големините на силите F_1 и F_2 :

$$F = F_1 + F_2 = 3 \cdot 10^{-4} N + 4 \cdot 10^{-4} N = 7 \cdot 10^{-4} N \quad (3 \text{ точки})$$

2. Кух съд има цилиндрична форма, маса $m = 10 \text{ kg}$ и площ на напречното сечение $S = 0,4 \text{ m}^2$. Съдът плава (вертикално изправен) във вода със плътност $\rho = 1000 \text{ kg/m}^3$. Приемете земното ускорение за $g = 10 \text{ m/s}^2$.

а) Опишете, пресметнете и сравнете силите действащи на съда в равновесие. Приемете, че обема на потопената част на съда е V .

Силите действащи на съда в състояние на равновесие са силата на тежестта и Архимедовата сила. Тези сили са равни по големина и обратни по посока:

$$F_A = \rho V g; G = mg$$

$$F_A = G \quad (3 \text{ точки})$$

Нека в резултат на действащо вертикално надолу кратко във времето външно въздействие съда се потапя на дълбочина x , след което се освобождава. Възникват вертикални хармонични трептения.

б) Определете посоката и големината на въртящата сила

Архимедовата сила нараства $F'_A = F_A + x S \rho g$. Силата на тежестта $G = mg$ не се променя. Двете сили действат в противоположни посоки. Следователно, възниква въртяща сила насочена нагоре:

$$F = F'_A - G = F_A + x S \rho g - G = (S \rho g) x \quad (3 \text{ точки})$$

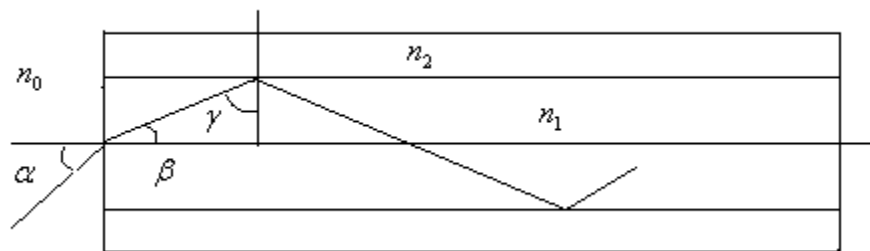
в) Определете периода на възникналите вертикални хармонични трептения на съда.

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\rho g S}} = 2\pi \sqrt{\frac{(10 \text{ kg})}{\left(1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right) \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right) (0,4 \text{ m}^2)}} = 2\pi \frac{1}{20} \text{ s} = \frac{\pi}{10} \text{ s} = 0,314 \text{ s} \quad (3 \text{ точки})$$

г) Пресметнете честотата на хармоничните трептения.

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{10}{\pi} \frac{1}{\text{s}} = 3,2 \text{ Hz} \quad (1 \text{ точка})$$

3. Оптично влакно се състои от цилиндрична сърцевина с радиус a и показател на пречупване $n_1 = 1,500$ и обвивка с пръстеновидно напречно сечение с показател на пречупване $n_2 = 1,414$. Краищата на влакното са перпендикулярни спрямо оста му и граничат с въздух ($n_0 = 1$). В единия край (срез) на влакното (виж Фиг. 1), пада светлинен лъч под ъгъл α спрямо оста му.



Фиг. 1 схема на движението на лъча падащ върху оптичното влакно

- а) Определете синуса на ъгъла на пречупване β на падащия лъч в сърцевината на влакното.

(1 точка)

От закона на Снелиус получаваме, че

$$n_0 \sin \alpha = n_1 \sin \beta \Rightarrow \sin \beta = \frac{n_0 \sin \alpha}{n_1}$$

- б) Пресметнете синуса на граничния ъгъл γ_0 на пълно вътрешно отражение за границата между сърцевината и обвивката на оптичното влакно.

(1 точка)

От закона на Снелиус и в съответствие с дефиницията на явлението пълно вътрешно отражение получаваме, че синуса на ъгъла на пълното вътрешно отражение е $\sin \gamma_0 = \frac{n_2}{n_1} \approx 0,943$.

- в) Напишете условието за ъгъла β (спрямо оста на влакното) разпространяването под който позволява реализирането на пълно вътрешно отражение на границата между сърцевината и обвивката на оптичното влакно. Изразете условието чрез показателите на пречупване на сърцевината и обвивката на оптичното влакно.

(1 точка)

$$\beta \leq 90^\circ - \gamma_0$$

$$\sin \beta \leq \sin \beta_0 = \sin (90^\circ - \gamma_0) = \cos \gamma_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \gamma_0} = \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}$$

- г) Напишете условието за максималния ъгъл α_{MAX} на падане на светлинен лъч върху сърцевината на влакното, позволяващо реализирането на пълно вътрешно отражение на границата между сърцевината и обвивката на оптичното влакно. Изразете условието чрез показателите на пречупване на сърцевината и обвивката на оптичното влакно.

(2 точки)

Използвайки, че $n_0 \sin \alpha = n_1 \sin \beta$ получаваме

$$\sin \alpha = \frac{n_1 \sin \beta}{n_0} \leq \sin \alpha_{MAX} = \frac{n_1}{n_0} \sin \beta_0 = \frac{n_1}{n_0} \cos \gamma_0 = \frac{n_1}{n_0} \sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2} = \frac{1}{n_0} \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$$

Нека приемем, че условието позволяващо разпространението на оптичния лъч в сърцевината на влакното като резултат от последователно реализиращи се пълни вътрешни отражения е

изпълнено, като ъгъла на падане на лъча върху обвивката е γ . Да приемем също така, че дължината на влакното е L .

д) Пресметнете пътя S изминат от лъча преминавайки през влакното.

$$S = s \frac{L}{l} = \frac{L}{\sin \gamma}$$

където s и l са хипотенузата и катета лежащ върху оптичната ос на влакното на правоъгълния триъгълник показан на Фиг.1. **(2 точки)**

е) Пресметнете времето t необходимо на лъча за да достигне другия край на влакното. Приемете че скоростта на светлината във вакуум е c .

$$t = \frac{S}{c/n_1} = \frac{L}{c/n_1 \sin \gamma} = \frac{L n_1}{c \sin \gamma} \quad \text{(1 точка)}$$

Нека разгледаме дисперсионното разширение на оптичен импулс разпространяващ се във влакното. Оптичният импулс можем да разгледаме като съвкупност от оптични моди. Всяка от модите можем да представим с оптичен лъч, който се разпространява в сърцевината на влакното по зигзагообразна траектория поради многократните вътрешни отражения на границата между сърцевината и обвивката. Дисперсионното разширение на импулса при преминаване през влакното можем да оценим чрез разликата във времената на преминаване на най-бавната (оптичен лъч изминал най-дълъг път) и най-бързата (оптичен лъч изминал най-къс път) моди.

ж) Получете оценка за дисперсионното разширение на импулса при преминаване през влакното.

(2 точки)

Времето необходимо за преминаване през влакното на най-бавната мода (оптичен лъч изминал най-дълъг път) е

$$t_{MAX} = \frac{S_{MAX}}{c/n_1} = \frac{L}{c/n_1 \sin \gamma_0} = \frac{L n_1}{c \sin \gamma_0} = \frac{L n_1^2}{c n_2}$$

Това е оптичния лъч който пада на границата между обвивката и сърцевината под граничния ъгъл γ_0 .

Времето необходимо за преминаване през влакното на най-бързата мода (оптичен лъч изминал най-къс път) е

$$t_{MIN} = \frac{S_{MIN}}{c/n_1} = \frac{L}{c/n_1 \sin \frac{\pi}{2}} = \frac{L n_1}{c}$$

Това е оптичния лъч преминал по оста на сърцевината.

Оценка за дисперсионното разширение на импулса или разликата във времената на преминаване на най-бавната и най-бързата моди ще бъде:

$$\Delta t = t_{MAX} - t_{MIN} = \frac{L n_1 (n_1 - n_2)}{c n_2}$$