



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, Велинград, 28 февруари 2009 г.
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Удар на метеорит с планета.

а) от закона за запазване на импулса (ЗЗИ) следва, че $mv_M + Mv_{II} = (m + M)v'_{II}$. Следователно

$$v'_{II} = \frac{mv_M + Mv_{II}}{m + M} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (1.1)$$

б) промяната на скоростта на планетата $\Delta v = v'_{II} - v_{II} = \frac{mv_M + Mv_{II}}{m + M} - v_{II} = \frac{m(v_M - v_{II})}{m + M} \approx \frac{m(v_M - v_{II})}{M}$

$$= \frac{r_M^3}{r_{II}^3} (v_M - v_{II}) [0,5 \text{ т}] \quad (1.2).$$

в) След удара планетата ще се движи по елипса като най-малкото разстояние между планетата и звездата е R , а най-голямото – R' . В тези две точки (двата края на голямата ос на елипсата) скоростите са перпендикулярни на голямата ос на елипсата. Нека бележим скоростта на планетата при разстояние R с v''_{II} . От закона за запазване на момента на импулса (ЗЗМИ) (или втория закон на Кеплер) следва,

че $v'_{II}R = v''_{II}R'$, откъдето $v''_{II} = v'_{II} \frac{R}{R'} [0,2 \text{ т}] \quad (1.3)$. От закона за запазване на механичната енергия

(ЗЗЕ), приложен за същите две точки, следва, че $\frac{Mv'^2_{II}}{2} - \frac{\gamma M_3 M}{R} = \frac{Mv''^2_{II}}{2} - \frac{\gamma M_3 M}{R'} [0,2 \text{ т}] \quad (1.4)$. От

условието за движение по кръгова орбита следва, че $\frac{\gamma M_3 M}{R^2} = \frac{Mv_{II}^2}{R}$, откъдето $\frac{\gamma M_3}{R} = v_{II}^2 [0,2 \text{ т}]$

(1.5). Използвайки (1.3) и (1.5) и преобразувайки (1.4) се получава $R' = R \frac{1}{2\left(\frac{v_{II}}{v'_{II}}\right)^2 - 1} [0,4 \text{ т}] \quad (1.6)$.

г) Замествайки в (1.6) v'_{II} с $v_{II} + \Delta v$, получаваме $R' = R \frac{1}{2\left(\frac{v_{II}}{v_{II} + \Delta v}\right)^2 - 1} = R \frac{1}{2\left(\frac{1}{1 + \frac{\Delta v}{v_{II}}}\right)^2 - 1} \approx$

$$R \frac{1}{2\left(1 - 2\frac{\Delta v}{v_{II}}\right) - 1} = R \frac{1}{1 - 4\frac{\Delta v}{v_{II}}} \approx R \left(1 + 4\frac{\Delta v}{v_{II}}\right) [0,5 \text{ т}] \quad (1.7).$$

д) голямата полуос a на елипсата, която е орбитата на планетата след удара, е $a = \frac{R + R'}{2} [0,1 \text{ т}]$.

Използвайки (1.7), получаваме $a = \frac{R + R\left(1 + 4\frac{\Delta v}{v_{II}}\right)}{2} = R \left(1 + 2\frac{\Delta v}{v_{II}}\right) [0,2 \text{ т}] \quad (1.8)$. Използвайки третия

закон на Кеплер и сравнявайки параметрите на старата и новата орбити, получаваме $\frac{T'^2}{T^2} = \frac{a^3}{R^3} [0,2 \text{ т}]$

(1.9). Замествайки (1.8) в (1.9), $T' = T \left(\frac{a}{R} \right)^{3/2} \approx T \left(1 + 2 \frac{\Delta v}{v_{II}} \right)^{3/2} \approx T \left(1 + 3 \frac{\Delta v}{v_{II}} \right) [0,2 \text{ т}]$ (1.10).

Следователно $\Delta T = T' - T = T 3 \frac{\Delta v}{v_{II}} [0,2 \text{ т}]$. Използвайки (1.2), $\Delta T = 3T \frac{r_M^3}{r_{II}^3} \frac{(v_M - v_{II})}{v_{II}} [0,6 \text{ т}] = 3.(365.24.3600s) \frac{(10km)^3}{(6400km)^3} \frac{45-30km/s}{30km/s} = 0,18s [0,5 \text{ т}]$.

е) От 3ЗМИ следва, че $\Delta L = I \Delta \Omega = -r_{II} \Delta p_M [0,3 \text{ т}]$ (1.11). $\Delta \Omega \approx -\frac{2\pi \Delta T_B}{T_B^2} [0,2 \text{ т}]$ (1.12). $I = \frac{2}{5} M r_{II}^2$ (1.13). $\Delta p_M = m(v_M - v_{II}) [0,1 \text{ т}]$ (1.14) (тук се пренебрегва линейната скорост на точката на удара, дължаща се на въртенето на планетата: $(\frac{2\pi}{T_B} r_{II} \ll v_M - v_{II})$). Замествайки (1.12), (1.13) и (1.14) в (1.11),

получаваме $-\frac{2}{5} M r_{II}^2 \cdot \frac{2\pi \Delta T_B}{T_B^2} = -r_{II} m (v_M - v_{II}) [0,1 \text{ т}]$, откъдето $\Delta T_B \approx \frac{5}{4\pi} T_B^2 \frac{(v_M - v_{II})}{r_{II}} \left(\frac{r_M}{r_{II}} \right)^3 [0,3 \text{ т}]$ (1.15) $= \frac{5}{4\pi} (24.3600s)^2 \frac{(45-30km/s)}{6400km} \left(\frac{10km}{6400km} \right)^3 = 0,027s [0,5 \text{ т}]$.

ж) промяната $\Delta E_{кин}^{пост}$ на кинетичната енергия на постъпателното движение на системата планета-метеорит вследствие на удара е $\Delta E_{кин}^{пост} = \frac{(M+m)v_{II}'^2}{2} - \frac{Mv_{II}^2}{2} - \frac{mv_M^2}{2} [0,3 \text{ т}]$ (1.16). Използвайки (1.1), (1.16) се преобразува до $\Delta E_{кин}^{пост} = -\frac{mM}{2(m+M)} (v_M - v_{II})^2 [0,5 \text{ т}] \approx -\frac{m}{2} (v_M - v_{II})^2 [0,2 \text{ т}]$ (1.17).

з) промяната $\Delta E_{кин}^{върт}$ на кинетичната енергия на въртеливото движение на планетата вследствие на удара е $\Delta E_{кин}^{върт} = \frac{I\Omega'^2}{2} - \frac{I\Omega^2}{2} [0,1 \text{ т}] \approx I \Delta \Omega \Omega = -r_{II} \Delta p_M \Omega [0,2 \text{ т}]$. Използвайки (1.14), $\Delta E_{кин}^{върт} = -\frac{2\pi}{T_B} r_{II} m (v_M - v_{II}) [0,2 \text{ т}]$ (1.18).

и) от (1.17) и (1.18) отношението $\Delta E_{кин}^{върт} / \Delta E_{кин}^{пост} = \frac{-\frac{2\pi}{T_B} r_{II} m (v_M - v_{II})}{-\frac{m}{2} (v_M - v_{II})^2} = \frac{4\pi r_{II}}{T_B (v_M - v_{II})} [0,3 \text{ т}]$ (1.19) =

$$\frac{4\pi 6400km}{24.3600s(45-30)km/s} = 0,062 [0,2 \text{ т}]$$

й) тъй като $\Delta E_{кин}^{върт} / \Delta E_{кин}^{пост} \ll 1$, то енергията E_B на взрива $E_B \approx |\Delta E_{кин}^{пост}|$. Използвайки (1.17), E_B в

единици “бомби над Хиросима” е $E_B = \frac{\frac{m}{2} (v_M - v_{II})^2}{13,4 \cdot 10^{12} J} = \frac{5,5 \cdot 10^3 kg / m^3 4\pi \cdot (10 \cdot 10^3 m)^3 [(45-30)10^3 m/s]^2}{3 \cdot 2 \cdot 13,4 \cdot 10^{12} J} = 4,7 \cdot 10^{10} [0,5 \text{ т}]$.

к) ако $Q = \frac{1}{15} E_B$ е енергията, необходима да загрее и стопи част от повърхността с формата на конус с

радиус $n \cdot r_M$ и височина (дълбочина) $2 \cdot r_M / n$, то $Q = \rho \frac{\pi (n r_M)^2}{3} \frac{2 r_M}{n} [c(T_T - T_{II}) + q] [0,2 \text{ т}]$, откъдето

$$n = \frac{3 \cdot \frac{1}{15} E_B}{2\pi r_M^3 [c(T_T - T_{II}) + q]} [0,2 \text{ т}] (1.20) = \frac{3 \cdot \frac{1}{15} 4,7 \cdot 10^{10} \cdot 13,4 \cdot 2,10^{12} \text{ J}}{2\pi 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 (10^4 \text{ m})^3 \left[10^3 \frac{\text{J}}{\text{kgK}} (1000 - 0)^\circ \text{C} + 4 \cdot 10^5 \frac{\text{J}}{\text{kg}} \right]}$$

$\approx 11 [0,4 \text{ т}]$. Следователно кратерът от удара ще има радиус около 110 км $[0,1 \text{ т}]$ и дълбочина около 1,8 км. $[0,1 \text{ т}]$

Задача 2. Графен и въглеродни нанотръбички.

а) Нека отместването на един въглероден атом е x в посока на едната С-С връзка. Съгласно нарисувания отествания в това трептение, едната пружинка (тази, към която атомът е отместен) е свита с $2x [0,2 \text{ т}]$, а другите две връзки симетрично са разтегнати с някакво неизвестно разтягане y

($y = d' - d$). То може да се определи от косинусовата теорема: $\left(\frac{d'}{2}\right)^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + x^2 - 2\left(\frac{d}{2}\right)x \cos 120^\circ$

(2.1), откъдето $d' = d \sqrt{1 + \frac{2x}{d} + 4x^2} \approx d + x$ (2.2). Следователно $y = x [0,5 \text{ т}]$ (2.3). На разглеждания

атом действат три сили: $|\vec{F}_1| = k2x$, $|\vec{F}_2| = |\vec{F}_3| = kx$ (2.4). Ъглите, които $\vec{F}_1$ сключва с $\vec{F}_2$ и $\vec{F}_3$ са равни

на 60° . Следователно резултантната сила $|\vec{F}_{\text{рез}}| = |\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2 + \vec{F}_3| = |\vec{F}_1| + |\vec{F}_2| = k2x + kx = 3kx = ma [0,5 \text{ т}]$ (2.5). Това е уравнение на линеен хармоничен осцилатор с честота

$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3k}{m}} [0,3 \text{ т}]$ (2.6). За стойността на ν_0 се получава

$$\nu_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3 \cdot 596 \text{ N/m}}{12,166 \cdot 10^{-27} \text{ kg}}} = 4,77 \cdot 10^{13} \text{ Hz} = 1590 \text{ cm}^{-1} [0,5 \text{ т}].$$

б) Получаваме формула за големината на хиралния вектор $C_{n,p}$. От косинусовата теорема $C_{n,p}^2 = n^2 a_1^2 + p^2 a_2^2 - 2na_1 pa_2 \cos 120^\circ [0,5 \text{ т}]$ (2.7). Тъй като $|\vec{a}_1| = |\vec{a}_2| = \sqrt{3}d [0,3 \text{ т}]$ (2.8), то

$C_{n,p} = \sqrt{3}d \sqrt{n^2 + p^2 + np} [0,2 \text{ т}]$ (2.9). Тъй като дължината на този вектор е приблизително равна на

обиколката на цилиндъра, то $R_{n,p} \approx \frac{C_{n,p}}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}d \sqrt{n^2 + p^2 + np}}{2\pi} [0,5 \text{ т}]$ (2.10).

в) Разглеждайки равнината на графена, може да се забележи, че на всеки въглероден атом се пада площ, равна на площта на равностранен триъгълник със страна $h = \sqrt{3}d [0,3 \text{ т}]$. Площта на такъв

триъгълник е $S_{1c} = \frac{1}{2} h \cdot h \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4} d^2 [0,2 \text{ т}]$ (2.11). Следователно $\sigma = \frac{4xe}{3\sqrt{3}d^2} [0,5 \text{ т}]$ (2.12).

г) Теоремата на Гаус твърди, че $\Phi = \oint_s \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q}{\epsilon_0}$ (2.13). Избирайки за затворена повърхност цилиндър

с радиус r и ос, съпадаща с оста на нанотръбичката, и “капацити” – кръгове, перпендикулярни на оста на цилиндъра и разстояние z между “капацитите”, то потока на интензитета на електричното поле през “капацитите” ще е нула, а през околната повърхност – $E(r) \cdot 2\pi r z$. Тогава

$\Phi(r > R_{n,p}) = E(r) 2\pi r z = \frac{\sigma 2\pi R_{n,p} z}{\epsilon_0}$ (2.14) и $\Phi(r < R_{n,p}) = 0$ (2.15). Следователно

$E(r > R_{n,p}) = \frac{\sigma R_{n,p}}{\epsilon_0 r}$ (2.16) и $E(r < R_{n,p}) = 0 [0,3 \text{ т}]$ (2.17). Нека отделим част от цилиндричната

повърхност, достатъчно малка, че да можем да я разглеждаме като равнина (т.е. с размери $L \ll R_{n,p}$). Прилагайки отново теоремата на Гаус за точки, намиращи се много близко до тази част (т.е. разстоянието от точките до частта $t \ll L$ за да имаме право да разглеждаме тази част като безкрайна равнина) получаваме, че интензитета на електричното поле E_1 , създадено от тази част и от двете страни

(отвътре и отвън на цилиндъра) е $E_1(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} [0,2 \text{ т}]$ (2.18). Тъй като резултантното поле е сума на

полето на разглежданата от нас част и останалата част на цилиндъра, то следва, че тази част се намира

в поле с интензитет $E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$. Следователно на всеки въглероден атом ще действа поле $E_2 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

[0,5 т] (2.19). Използвайки (2.12) и (2.19), силата $F_{1C} = xeE_2 = xe \frac{4xe}{3\sqrt{3}d^2} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{x^2 e^2}{\varepsilon_0 d^2}$ [0,5 т] (2.20).

д) на всеки атом ще действат 4 сили – три еластични и една електрична (виж 2.20). В равнината, допирателна към цилиндъра в точката, където се намира атома, проекции имат само трите еластични сили. Тъй като ъглите между тях остават много близки до 120° , то тези три сили трябва да са равни [0,3 т]. Следователно, разтягането z на трите С-С връзки трябва да е едно и също [0,2 т]. От (2.10)

следва, че $R_{n,0} = \frac{\sqrt{3}dn}{2\pi}$ (2.21). Промяната на радиуса е $\Delta R_{n,0} = \frac{\sqrt{3}n\Delta d}{2\pi} = \frac{\sqrt{3}nz}{2\pi}$ [0,3 т] (2.22). От трите

еластични сили, едната е успоредна на оста на цилиндъра, следователно радиална ѝ проекция е нула [0,2 т]. На останалите две сили (от “зиг-заг”-образните връзки) само проекцията им $F_\perp$ в равнина, перпендикулярна на оста на цилиндъра има принос към резултантната еластична сила $F_{еласт}$.

$F_\perp = \frac{\sqrt{3}}{2} F_{зиг-заг} = \frac{\sqrt{3}}{2} kz$ [0,2 т] (2.23). От геометрични съображения (подобни триъгълници) следва,

че $\frac{F_{еласт}}{F_\perp} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} d}{R_{n,0}}$ (2.24). Тъй като атомът е в равновесие $F_{1C} = F_{еласт}$ (2.25). Отчитайки (2.22) - (2.25)

получаваме $F_{1C} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{x^2 e^2}{\varepsilon_0 d^2} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} d}{R_{n,0}} F_\perp = \frac{3}{4} \frac{k dz}{R_{n,0}} = \frac{3}{4} k dz \frac{2\pi}{\sqrt{3} dn}$ (2.26). От (2.26) и (2.22) намираме

$\Delta R = \frac{2}{3\sqrt{3}\pi^2} \frac{n^2 x^2 e^2}{\varepsilon_0 k d^2}$ [0,8 т] (2.27).

е) можем да очакваме че отместванията на атомите в “дишащото” трептене ще бъдат като тези при добавяне на електричен заряд. Следователно еластичната сила $F_{еласт}$ ще бъде възвръщаща сила [0,2 т].

От (2.24) получаваме $F_{еласт} = \frac{\sqrt{3}d}{2} \frac{\sqrt{3}kz}{2} \frac{2\pi}{\sqrt{3}dn} = \frac{\sqrt{3}\pi kz}{2n}$ [0,3 т] (2.28). Замествайки z от (2.22) в (2.28)

получаваме $F_{еласт} = \frac{\sqrt{3}\pi kz}{2n} = \frac{\sqrt{3}\pi k}{2n} \frac{2\pi \Delta R_{n,0}}{\sqrt{3}n} = \frac{\pi^2 k}{n^2} \Delta R_{n,0} = ma = m \frac{d^2(\Delta R_{n,0})}{dt^2}$ [0,5 т] (2.29).

Следователно $v_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi^2 k}{n^2 m}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{k}{m}}$ [0,5 т] (2.30). Сравнявайки v_1 от (2.30) с v_0 от (2.6),

получаваме $\frac{v_1}{v_0} = \frac{\frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{n} \sqrt{\frac{k}{m}}}{\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{3k}{m}}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}n}$ (2.31). Използвайки (2.21) $\frac{v_1}{v_0} = \frac{\pi \sqrt{3}d}{\sqrt{32\pi} R_{n,0}} = \frac{d}{2R_{n,0}}$ (2.32).

Следователно $v_1 = \frac{1590 \text{ cm}^{-1} 1.421 \text{ \AA}}{2R_{n,0}}$ или $v_1 [\text{cm}^{-1}] = \frac{1130}{R_{n,p} [\text{\AA}]} [0,5 т] (2.33).$

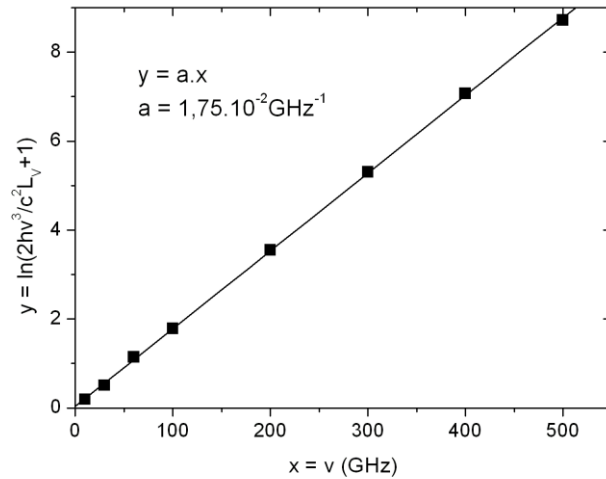
Задача 3. Реликтовото лъчение и константа на Вин.

а) след преобразувания формулата $L_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1}$ достига вида $\ln\left(\frac{2h\nu^3}{c^2 L_\nu} + 1\right) = \frac{h}{kT} \nu$ [0,7 т] (3.1).

Следователно, ако положим $y = \ln\left(\frac{2h\nu^3}{c^2 L_\nu} + 1\right)$ (3.2), а $x = \nu$ [0,2 т], то зависимостта е $y = ax$, т.е.

права линия с наклон $a = \frac{h}{kT}$ (3.3) [0,1 т].

ν , GHz	$L_\nu, \frac{J}{m^2.s.sr.Hz}$	y
10,0	$7,0.10^{-20}$	0,191
30,0	$6,0.10^{-19}$	0,508
60,0	$1,5.10^{-18}$	1,14
100	$3,0.10^{-18}$	1,78
200	$3,5.10^{-18}$	3,55
300	$2,0.10^{-18}$	5,30
400	$8,0.10^{-19}$	7,07
500	$3,0.10^{-19}$	8,72



б) стойностите на y за дадените честоти са дадени в таблицата, а графиката е дадена на фигурата [3 т].

Наклона на правата е $a = 1,75.10^{-2} GHz^{-1}$ (3.4) [0,5 т]. Следователно $T_{rel} = \frac{h}{ka} =$

$$= \frac{6,626.10^{-34} J.s}{1,381.10^{-23} . 1,75.10^{-11} Hz^{-1}} = 2,74 K [0,5 т]. \text{ Приетата в литературата стойност е } T_{rel} = 2,726 K.$$

в) плътността на яркостта по дължина на вълната $L_\lambda = \frac{dL}{d\lambda} = \frac{dL}{d\nu} \left| \frac{d\nu}{d\lambda} \right| = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \left| -\frac{c}{\lambda^2} \right| =$

$$\frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \quad (3.5) [0,5 т].$$

г) екстремумите на функцията L_λ са решения на уравнението $\frac{dL_\nu}{d\lambda} = 0$ [0,2 т]. (3.6).

$$\text{Следователно } 2hc^2 \left[-\frac{5}{\lambda^6} \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} + \frac{1}{\lambda^5} \frac{(-1)e^{\frac{hc}{\lambda kT}} \cdot \frac{hc}{kT} (-1) \frac{1}{\lambda^2}}{\left(e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1 \right)^2} \right] = 0 [0,6 т] \quad (3.7). \text{ След опростяване (3.7) се}$$

$$\text{свежда до } 5 = \frac{hc}{\lambda kT} \frac{e^{\frac{hc}{\lambda kT}}}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} [0,6 т]. \quad (3.8). \text{ Ако положим } y = \frac{hc}{\lambda kT} [0,6 т], \quad (3.8) \text{ се преобразува до}$$

$$y = 5(1 - e^{-y}) [0,5 т] \quad (3.9).$$

д) анализирайки трансцендентното уравнение (3.9), може да се стигне до извода, че решението е число, много близко до 5 [0,3 т]. Използваме итерационен метод за намиране на решението, т.е. предполагаме, че решението е 5 и пресмятаме дясната страна. Резултатът е 4,96631. С това число наново пресмятаме дясната страна. Резултатът е 4,96526, Третата стъпка дава 4,96512, четвъртата - 4,96511, а петата - 4,96511. Можем да предположим (без сериозна математическа обосновка), че редицата е бързо сходяща и решението с 5 значещи цифри е $y_{max} = 4,9651 [0,7 т] \quad (3.10)$. От (3.8) и (3.10) следва, че

$$y_{max} = 4,9651 = \frac{hc}{\lambda_{max} kT}. \text{ Така за константата на Вин получаваме } b = \lambda_{max} T = \frac{hc}{y_{max} k} \quad (3.11) [0,2 т] =$$

$$\frac{6,626.10^{-34} J.s. 2,998.10^8 m/s}{4,9651. 1,381.10^{-23} J/K} = 2,897.10^{-3} m.K [0,3 т].$$

е) от (3.11) пресмятаме λ_{max} за реликтовото лъчение: $\lambda_{max} = \frac{2,897.10^{-3} m.K}{2,75K} = 1,05.10^{-3} m = 1,05 mm$ [0,5 т].