



Творчество
и иновации

Европейска година 2009

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, Велинград, 28 февруари 2009 г.
Специална тема

Задача 1. Удар на метеорит с планета. Еднородна планета с радиус $r_{\text{п}} = 6400 \text{ km}$ и плътност $\rho = 5,5 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ се движи със скорост $v_{\text{п}} = 30 \text{ km/s}$ около звезда по кръгова орбита с радиус R . Периодът на обикаляне е $T = 365$ дни. Метеорит с радиус $r_{\text{м}} = 10 \text{ km}$ и същата плътност застига планетата със скорост с големина спрямо звездата в момента на удара $v_{\text{м}} = 45 \text{ km/s}$ и посока, успоредна на скоростта на планетата. Отбелязвайте масите на планетата и метеорита съответно с M и m .

а) получите формула за скоростта $v'_{\text{п}}$ на планетата след удара [0,5 т]

б) получите приближена формула за промяната на скоростта на планетата $\Delta v = v'_{\text{п}} - v_{\text{п}}$, ако $m \ll M$ [0,5 т]

в) нека R' е разстоянието на максимално отдалечаване на планетата от звездата след удара. Изразете R' чрез R , $v_{\text{п}}$ и $v'_{\text{п}}$ [1 т]

г) получите приближена (с точност до линейни членове) формула за R' , изразен чрез R , $v_{\text{п}}$ и Δv [0,5 т]

д) като намерите периода на обикаляне на планетата след удара T' , намерете промяната на периода $\Delta T = T' - T$ [1,5 т] и я изчислете в секунди [0,5 т].

е) Планетата се върти преди удара с период $T_{\text{в}} = 24 \text{ h}$. Оста на планетата е перпендикулярна на равнината на орбитата, а посоката на въртене е същата като посоката на обикаляне на планетата около звездата. Метеоритът удря планетата в точка от екватора, където е пладне (т.е. тангенциално на повърхността на планетата), след което остава на мястото на удара. Намерете приближена формула за промяната на периода $\Delta T_{\text{в}}$ на въртене на планетата и я изчислете в секунди [1,5 т].

ж) намерете приближена формула за промяната $\Delta E_{\text{кин}}^{\text{пост}}$ на кинетичната енергия на постъпателното движение на системата планета-метеорит вследствие на удара [1,5 т].

з) намерете приближена формула за промяната $\Delta E_{\text{кин}}^{\text{върт}}$ на кинетичната енергия на въртеливото движение на планетата вследствие на удара [0,5 т].

и) намерете и изчислете отношението $\Delta E_{\text{кин}}^{\text{върт}} / \Delta E_{\text{кин}}^{\text{пост}}$ [0,5 т].

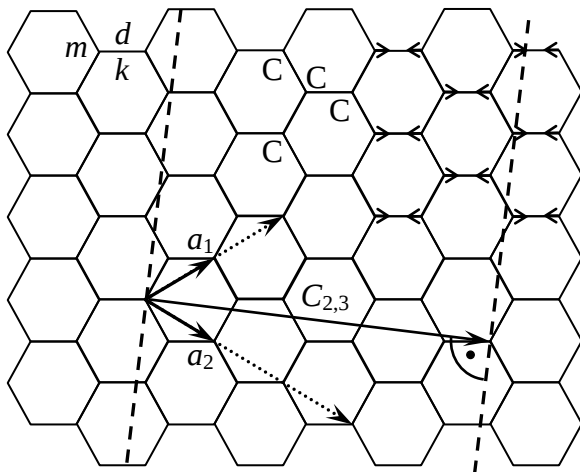
й) енергията, отделяща се при взривове, се мери в т.нар. тротилов (TNT - тринитротолуен) еквивалент. Приема се, че при взрива на 1 g TNT се отделя 1000 cal топлина, или 1 kt (килотон) $\text{TNT} = 4,2 \cdot 10^{12} \text{ J}$. Енергията на взрива на атомната бомба, взривена над Хиросима през 1945 г., е била 13 kt TNT . Изчислете енергията $E_{\text{в}}$ на взрива, получаващ се от удара на метеорита в планетата, в единици “бомби над Хиросима” [0,5 т].

к) много груб модел предполага, че $1/15$ от енергията $E_{\text{в}}$ на удара загарява и стапя част от повърхността на планетата с формата на конус с радиус $n \cdot r_{\text{м}}$ и височина (дълбочина) $2 \cdot r_{\text{м}} / n$. Предполага се, че кратерът, образуван от метеорита има размерите на този конус. Изчислете неизвестното n и определете размерите на кратера [1 т]. Температурата на планетата е $T_{\text{п}} = 0 \text{ }^{\circ}\text{C}$, температурата на топене на повърхността $T_{\text{т}} = 1000 \text{ }^{\circ}\text{C}$, специфичният топлинен капацитет на повърхността е $c = 1 \cdot 10^3 \text{ J/kg.K}$, а специфичната топлина на топене на повърхността е $q = 4 \cdot 10^5 \text{ J/kg}$.

Задача 2. Графен и въглеродни нанотръбички. Молекулна структура от въглеродни атоми, подредени по показания на фигурата начин в една единствена равнина, се нарича графен. В графена всеки въглероден атом с маса $m = 12 \text{ а.е.}$ образува три връзки (сключващи ъгъл 120°) с три съседни въглеродни атома. Дължината на всяка C-C връзка е $d = 1,421 \text{ \AA}$. Силата на химичната връзка може да се моделира като безмасова пружинка с дължина d в неразтегнато състояние и коефициент на еластичност $k = 596 \text{ N/m}$.

а) получите формула за честотата ν_0 на трептенето на въглеродните атоми в графена, нарисувано в горния десен ъгъл на фигурата. Приемете, че амплитудата на трептенето $A \ll d$, както и че, изменението на ъглите между С-С връзките е несъществено. Изчислете стойността на ν_0 в извънсистемната единица cm^{-1} [2 т].

б) Нека от равнината на графена “изрежем” (по пунктирните линии на фигурата) ивица със широчина $C_{n,p}$, където $C_{n,p}$ е големината на т. нар. “хирален вектор” $\vec{C}_{n,p} = n\vec{a}_1 + p\vec{a}_2$. Дефинирането на векторите $\vec{a}_1$ и $\vec{a}_2$ е дадено на фигурата. Даден е и един примерен хирален вектор $\vec{C}_{2,3} = 2\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$. Ако от тази ивица се направи цилиндър като се “слепят” ръбовете ѝ, се получава въглеродна нанотръбичка от тип (n,p) с радиус $R_{n,p}$, т.е. всички въглеродни атоми лежат на този цилиндър като разстоянията между най-



близките съседи остават равни на d . Приемете, че $R_{n,p} \gg d$. Получете $R_{n,p} = f(d, n, p)$ [1,5 т].

в) оказва се, че нанотръбичките от тип (n,p) с n и p такива, че $|n - p| = 3u$, u – цяло число, са проводящи. Нека към една такава тръбичка добавим такова количество електричен заряд, че на всеки въглероден атом да се пада заряд xe , (x – число, e – заряд на електрона). Разглеждайки нанотръбичката като однородна непрекъсната среда, намерете повърхнинната плътност на заряда

(количество заряд на единица площ) $\sigma = \frac{\Delta q}{\Delta S}$ [1 т].

г) използвайки теоремата на Гаус, намерете интензитета $E(r)$ на електричното поле за точки вътре и вън от нанотръбичката и докажете, че електричната сила F_{1C} , която действа на всеки въглероден атом, при добавен към нанотръбичката

електричен заряд $xe/1C$, ще има големина $F_{1C} = \frac{2}{3\sqrt{3}} \frac{x^2 e^2}{\epsilon_0 d^2}$ [1,5 т].

д) нанотръбичка от тип $(n,0)$ или $(0,p)$ е от тип – “зиг-заг”. Нарича се така, защото за въглеродни атоми, лежащи в равнина, перпендикулярна на оста на цилиндъра, свързващите ги С-С връзки образуват “зиг-заг”-образна затворена начупена линия. Третите С-С връзки на тези атоми са успоредни на оста на цилиндъра. При n (или p) = $3u$, u – цяло число, тя ще бъде проводяща “зиг-заг” нанотръбичка. При зареждане на такава неутрална тръбичка с електричен заряд $xe/1C$, нейният радиус ще се промени с ΔR . Намерете $\Delta R = f(k, d, n, x)$. Приемете, че $\Delta R \ll R_{n,0}$ и изменението на ъглите между С-С връзките е несъществено [2 т].

е) оказва се, че трептенето с честота ν_0 , намерено в подусловие а) за графена, има почти същата честота и в нанотръбичките. В тях съществува и друго трептене, при което всички атоми трептят (почти) радиално във фаза, оставайки винаги на повърхността на цилиндър. Това трептене се нарича “дишащо”. Използвайки резултатите от подусловие д), намерете формула за честотата ν_1 на това трептене за $(n, 0)$ тръбички $\nu_1 = f(k, m, d, n)$. Предполагайки, че тази формула важи за всички нанотръбички (не само за тези от тип “зиг-заг”), получите удобна за прилагане емпирична формула $\nu_1 [\text{cm}^{-1}] = f(R_{n,p} [\text{\AA}])$ (т.е. като заместите в тази формула радиуса $R_{n,p}$ на нанотръбичката в $\text{\AA}$ да получите честотата ν_1 на “дишащото” трептене в cm^{-1}) [2 т].

Задача 3. Реликтовото лъчение и константа на Вин. Едно от най-сериозните експериментални доказателства в полза на теорията за “Големия взрив” е наличието във Вселената на изотропно топлинно лъчение с температура $T_{\text{рел}}$, наречено реликтовое. Енергетичните свойства на топлинно лъчение могат да се опишат чрез излъчвателните свойства на идеално черно тяло, което е в равновесие с това лъчение. Честотната плътност на яркостта (т.е. излъчената енергия от единица площ за единица време в единица пространствен ъгъл в единица честотен интервал) на идеално черно тяло се дава с формулата

$$L_\nu = \frac{dL}{d\nu} = \frac{dE}{dS \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\nu} = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{kT} - 1}, \text{ където } h \text{ е константата на Планк, } c \text{ е скоростта на}$$

светлината, а k е константата на Болцман. Съвременните експериментални измервания на реликтовото лъчение дават следните резултати (в термини на L_ν , виж таблицата):

ν , GHz	L_ν , $\frac{J}{m^2 \cdot s \cdot sr \cdot Hz}$
10,0	$7,0 \cdot 10^{-20}$
30,0	$6,0 \cdot 10^{-19}$
60,0	$1,5 \cdot 10^{-18}$
100	$3,0 \cdot 10^{-18}$
200	$3,5 \cdot 10^{-18}$
300	$2,0 \cdot 10^{-18}$
400	$8,0 \cdot 10^{-19}$
500	$3,0 \cdot 10^{-19}$

а) като преобразувате дадената ви формула, измислете такива нови променливи y и x , (функции на дадените променливи ν и L_ν) че графиката $y(x)$ на експерименталната зависимост да е права линия **[1 т]**.

б) Начертайте дадените данни на тази графика и от параметрите на правата изчислете $T_{\text{рел}}$ **[4 т]**.

в) от дадената формула за честотната плътност на яркостта L_ν , получите формула за плътността на яркостта по дължина на вълната

$$L_\lambda = \frac{dL}{d\lambda} = \frac{dE}{dS \cdot dt \cdot d\Omega \cdot d\lambda} \text{ [0,5 т].}$$

г) целта е да се намери максимума при λ_{max} на функцията L_λ . За да се справите с тази задача, първо трябва след преобразования да достигнете до трансцедентното уравнение $y = 5(1 - e^{-y})$. Как се изразява y чрез дадените в задачата параметри **[2,5 т]**?

д) изчислете с 5 значещи цифри решението на горното трансцедентно уравнение, използвайки калкулатор (без програмиране). След това получите формула за константата на Вин b и я изчислете **[1,5 т]**.

е) намерете λ_{max} за реликтовото лъчение **[0,5 т]**.

Полезна математика: Ако $|x| \ll 1$, то $(1+x)^n \approx 1+nx$, обем на конус $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, $\frac{df}{dx} = \frac{df}{dy} \frac{dy}{dx}$

Полезна физика: Закони на Кеплер:

1. Планетите се движат по елипси като Слънцето се намира в единия от двата фокуса на елипсата.

2. При движението на една планета по орбитата ѝ, площната ѝ скорост $\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{1}{2} r^2 \omega = \text{const.}$

3. Ако две планети 1 и 2, обикалящи около Слънцето, имат съответно периоди на обикаляне и големи полуоси на орбитите си T_1 и T_2 и a_1 и a_2 , то $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$.

Закон на Вин: произведението от дължината на вълната λ_{max} в максимума на плътността на яркостта на излъчването по дължина на вълната $L_\lambda = \frac{dL}{d\lambda}$ и температурата на идеално черно тяло е константа: $\lambda_{\text{max}} \cdot T = b$ (b – константа на Вин).

Инерчен момент на еднородно кълбо $I = \frac{2}{5} m r^2$,

$$1 \text{ а.е.} = 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}, \quad \nu [cm^{-1}] = \frac{\nu [Hz]}{3 \cdot 10^{10}}, \quad e = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C},$$

$$\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}, \quad 1 \text{ \AA} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad h = 6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s},$$

$$c = 2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s}, \quad k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$$