

325

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пробно състезание по физика
Търговище, 15–16.03.2008 г.

Примерни решения на специалната тема

Задача 1. а) На протона действат три сили:

$$(1) \quad F_1 = F_2 = \frac{ke^2}{r^2} \quad [0,25 \text{ т}]$$

и

$$(2) \quad F_3 = \frac{ke^2}{R^2} \quad [0,25 \text{ т}]$$

От условието за равновесие на трите сили имаме:

$$(3) \quad F_1 \cos \alpha + F_2 \cos \alpha = F_3 \quad [0,5 \text{ т}]$$

От друга страна:

$$(4) \quad \cos \alpha = \frac{R}{2r}$$

От уравнения (1)–(4) намираме

$$(5) \quad r/R = 1 \text{ или } r = R \quad [1,0 \text{ т}]$$

б) Прилагаме втория принцип на Нютон за един от електроните:

$$(6) \quad \frac{mv^2}{\rho} = F_1 \sin \alpha + F_2 \sin \alpha - F_3, \quad [1,0 \text{ т}]$$

където:

$$(7) \quad F_1 = F_2 = \frac{ke^2}{r^2} = \frac{ke^2}{R^2} \quad [0,5 \text{ т}]$$

и

$$(8) \quad F_3 = \frac{ke^2}{(2\rho)^2} \quad [0,5 \text{ т}]$$

От уравнения (5) и (4) намираме:

$$(9) \quad \cos \alpha = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Също така:

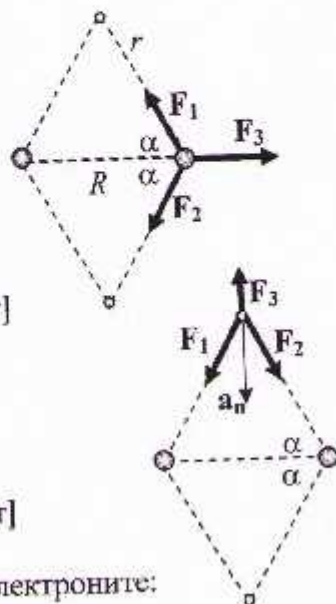
$$(10) \quad \rho = r \sin \alpha = \frac{R\sqrt{3}}{2}$$

Така получаваме:

$$(11) \quad mv^2 = \frac{(9 - \sqrt{3})ke^2}{6R}$$

или

$$(12) \quad v = \sqrt{\frac{(9 - \sqrt{3})ke^2}{6mR}} \quad [1,0 \text{ т}]$$



в) Кинетичната енергия на електроните е:

$$(13) \quad K = 2 \left(\frac{mv^2}{2} \right) = \frac{(9 - \sqrt{3})ke^2}{6R} \quad [0,25 \text{ т}]$$

Потенциалната енергия на системата е сума от потенциалните енергии на взаимодействие на всички двойки частици:

$$(14) \quad U = U_{pp} + 4U_{ep} + U_{ee}, \quad [0,25 \text{ т}]$$

където:

$$(15) \quad U_{pp} = \frac{ke^2}{R} \quad [0,25 \text{ т}]$$

$$(16) \quad U_{ep} = -\frac{ke^2}{r} = -\frac{ke^2}{R} \quad [0,25 \text{ т}]$$

$$(17) \quad U_{ee} = \frac{ke^2}{(2\rho)} = \frac{\sqrt{3}ke^2}{3R} \quad [0,25 \text{ т}]$$

Следователно:

$$(18) \quad U = -\frac{(9 - \sqrt{3})ke^2}{3R} \quad [0,25 \text{ т}]$$

Окончателно намираме:

$$(19) \quad E = K + U = -\frac{(9 - \sqrt{3})ke^2}{6R}.$$

Следователно:

$$(20) \quad C = \frac{(9 - \sqrt{3})}{6} \quad [0,5 \text{ т}]$$

г) От условието за квантуване имаме:

$$(21) \quad 2\pi\rho = n\frac{h}{mv} \text{ или } mvr = n\hbar \quad [0,5 \text{ т}]$$

Използваме изразите за радиуса (10) и за скоростта (12), за да получим уравнение за R:

$$(20) \quad m\sqrt{\frac{(9 - \sqrt{3})ke^2}{6mR}} \times \frac{\sqrt{3}}{2}mR = n\hbar$$

Следователно, в състояние на равновесие разстоянията между протоните могат да приемат следните стойности:

$$(21) \quad R = \frac{8n^2\hbar^2}{(9 - \sqrt{3})mke^2} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Минималното разстояние между протоните съответства на $n = 1$:

$$(22) \quad R_{\min} = \frac{8\hbar^2}{(9 - \sqrt{3})mke^2} \approx 5.78 \times 10^{-11} \text{ m} = 0.578 \text{ \AA}. \quad [0,25 \text{ т} + 0,25 \text{ т}]$$

Съответната минимална енергия се получава като заместим израза за $R_{\min}$ в (19):

$$(23) \quad E_{\min} = -\frac{(9-\sqrt{3}) ke^2}{6 R_{\min}} = -\frac{(9-\sqrt{3})^2 mk^2 e^4}{48 \hbar^2}$$

След упростиране на израза получаваме:

$$(24) \quad E_{\min} = -\frac{(14-3\sqrt{3}) mk^2 e^4}{8 \hbar^2} = -4.827 \times 10^{-18} \text{ J} = -30.2 \text{ eV} \quad [0,25 \text{ r} + 0,25 \text{ r}]$$

д) Понеже водородната молекула се разпада на два атома водород, енергията на връзката е:

$$(25) \quad E_B = 2E_H - E_{\min} = -27.2 \text{ eV} - (-30.2 \text{ eV}) = 3.0 \text{ eV} \quad [0,5 \text{ r} + 0,5 \text{ r}]$$

Коментар. Експериментално измереното разстояние между протоните във водородната молекула е $R_{\min} = 0.74 \text{ \AA}$, а експерименталната стойност на енергията на връзката: $E_B = 4.37 \text{ eV}$

Задача 2. а) Релативистката маса на електрона е:

$$(1) \quad m' = \frac{m}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad [1 \text{ r}]$$

Магнитната сила, действаща на електрона има големина:

$$(2) \quad F = evB \quad [1 \text{ r}]$$

и е насочена перпендикулярно на посоката на скоростта. Следователно електронът има нормално ускорение:

$$(3) \quad a = \frac{F}{m'} = \frac{evB\sqrt{1-(v/c)^2}}{m} \quad [1 \text{ r}]$$

Мощността на излъчване на електрона е:

$$(4) \quad P = \frac{e^2 a^2}{6\pi\epsilon_0 c^3} = \frac{e^4 v^2 B^2 (1-(v/c)^2)}{6\pi\epsilon_0 c^3 m^2} \approx 3,64 \times 10^{-19} \text{ W} \quad [1 \text{ r}]$$

б) От кинематичното съотношение:

$$(5) \quad a = \frac{v^2}{R} \quad [1 \text{ r}]$$

намираме радиуса на орбитата:

$$(6) \quad R = \frac{mv}{eB\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad [1 \text{ r}]$$

Вътре в областта с магнитно поле орбитата представлява дъга, на която съответства централен ъгъл:

$$(7) \quad \alpha = \arcsin(d/R) = \arcsin\left(\frac{deB\sqrt{1-(v/c)^2}}{mv}\right) \quad [1 \text{ r}]$$

Дължината на дъгата е съответно:

$$(8) \quad L = R\alpha = \frac{mv}{eB\sqrt{1-(v/c)^2}} \arcsin\left(\frac{deB\sqrt{1-(v/c)^2}}{mv}\right), \quad [1 \text{ r}]$$

а времето, за което частицата преминава областта с магнитно поле:

$$(9) \quad t = \frac{L}{v} = \frac{m}{eB\sqrt{1-(v/c)^2}} \arcsin\left(\frac{deB\sqrt{1-(v/c)^2}}{mv}\right). \quad [1 \text{ т}]$$

Пълното количество излъчена енергия е:

$$(10) \quad E_{\text{rad}} = Pt = \frac{e^3 B v^2 \sqrt{1-(v/c)^2}}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} \arcsin\left(\frac{deB\sqrt{1-(v/c)^2}}{mv}\right) \approx 1,57 \times 10^{-28} \text{ J} \quad [1 \text{ т}]$$

Задача 3. А) Налягането на газа в бутилката е:

$$(1) \quad p = \frac{mRT}{\mu V} = \frac{3mRT}{4\pi r^3 \mu}, \quad [0,5 \text{ т}]$$

където:

$$(2) \quad \mu = \mu_c + 4\mu_n = 0,016 \text{ kg/mol}$$

Мислено разделяме сферата на две половини. Върху всяка от тях газът упражнява сила:

$$(3) \quad F = p\pi r^2 = \frac{3mRT}{4r\mu} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Тази сила води до възникване на сила на еластичност със същата големина в пръстеновидното напречно сечение на бутилката. Площта на това напречно сечение е:

$$(4) \quad S \approx 2\pi r d, \quad [0,5 \text{ т}]$$

зашото $d \ll r$. Следователно механичното напрежение в напречното сечение е:

$$(5) \quad \sigma = \frac{F}{S} = \frac{3mRT}{8\pi r^2 d \mu}, \quad [0,5 \text{ т}]$$

Обемът на материала, от който е изработена бутилката е:

$$(6) \quad V_m = 4\pi r^2 d. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Следователно:

$$(7) \quad \sigma = \frac{3mRT}{2V_m \mu}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже $\sigma \leq \sigma_{\text{max}}$, намираме, че за изработката на бутилката с нужен материал с минимален обем:

$$(8) \quad V_{m,\text{min}} = \frac{3mRT}{2\sigma_{\text{max}} \mu} \quad [0,5 \text{ т}]$$

и минималната маса на бутилката е:

$$(9) \quad M_{\text{min}} = \rho V_{m,\text{min}} = \frac{3\rho mRT}{2\sigma_{\text{max}} \mu} \quad [1 \text{ т}]$$

Като заместим с числените данни, намираме:

$$(10) \quad M_{\text{min}} \approx 73 \text{ kg} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Б) Трупчето ще спре окончателно в точка с координата x такава, че:

$$(1) \quad k|x| \leq \mu mg \quad [0,5 \text{ т}]$$

т.е. между точките A и B с координати:

$$(2) \quad x_A = +\frac{\mu mg}{k} = 0,015 \text{ m} = 1,5 \text{ cm} \quad [0,5 \text{ т}]$$

и

$$(3) \quad x_B = -\frac{\mu mg}{k} = -0,015 \text{ m} = -1,5 \text{ cm} \quad [0,5 \text{ т}]$$

След като трупчето бъде освободено, то започва да се движи наляво, като извършва половин период от хармонично трептене около т. A . Следователно, първата точка на спиране има координата x_1 такава, че:

$$(4) \quad x_0 - x_A = x_A - x_1$$

или

$$(5) \quad x_1 = 2x_A - x_0 = -7 \text{ cm} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Тъй като условието (1) не е изпълнено, трупчето започва да се движи надясно, като извършва половин период хармонично трептене около т. B . Аналогично намираме, че втората точка на спиране е:

$$(6) \quad x_2 = 2x_B - x_1 = 4 \text{ cm} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже и за втората точка не е изпълнено условието (1), движението продължава наляво и трупчето достига точката:

$$(7) \quad x_3 = 2x_A - x_2 = -1 \text{ cm} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже за x_3 е изпълнено (1), правим извод, че трупчето спира окончателно в точка с координата:

$$(8) \quad x = -1 \text{ cm} \quad [1 \text{ т}]$$

До своето окончателно спиране трупчето извършва три полупериода на хармонично трептене, т.е. времето за движение е:

$$(9) \quad t = \frac{3T}{2} = 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad [0,5 \text{ т}]$$

$$(10) \quad t \approx 0,94 \text{ s} \quad [0,5 \text{ т}]$$

