234
(333)

МИНИСТИРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика
Сливен, 16 – 18 март 2007 г.
Примерни решения на задачите от специална тема

Задача 1. а) От закона за запазване на енергията следва:

(1) $$M_{\mathrm{Rn}}c^2 = M_{\mathrm{Po}}c^2 + M_{\alpha}c^2 + E_{\mathrm{Po}} + E_{\alpha},$$ **[0,5 т]**

където E_{Po} и E_{α} са съответно кинетичните енергии на ядрото на полония и на α-частицата. От закона за запазване на импулса за големините на импулсите на частиците след реакцията следва:

(2) $$P_{\mathrm{Po}} = P_{\alpha}.$$ **[0,5 т]**

Приемаме, че скоростите на частиците след реакцията са нерелативистки. Тогава:

(3) $$P_{\mathrm{Po},\alpha} = M_{\mathrm{Po},\alpha}v_{\mathrm{Po},\alpha}$$ **[0,5 т]**

(4) $$E_{\mathrm{Po},\alpha} = \frac{M_{\mathrm{Po},\alpha}v_{\mathrm{Po},\alpha}^2}{2},$$ **[0,5 т]**

Като използваме съотношенията (3) и (4), от уравненията (1) и (2) намираме:

(5) $$v_{\mathrm{Po}} = c\sqrt{\frac{2M_{\alpha}(M_{\mathrm{Rn}} - M_{\mathrm{Po}} - M_{\alpha})}{M_{\mathrm{Po}}(M_{\mathrm{Po}} + M_{\alpha})}} = 3{,}23\cdot 10^5\ \mathrm{m/s};$$ **[1 т]**

(6) $$v_{\alpha} = c\sqrt{\frac{2M_{\mathrm{Po}}(M_{\mathrm{Rn}} - M_{\mathrm{Po}} - M_{\alpha})}{M_{\alpha}(M_{\mathrm{Po}} + M_{\alpha})}} = 1{,}74\cdot 10^7\ \mathrm{m/s}$$ **[1 т]**

Скоростта на α-частицата е около 17 пъти по-ниска от скоростта на светлината. Това потвърждава валидността на допускането за нерелативистки скорости на частиците.

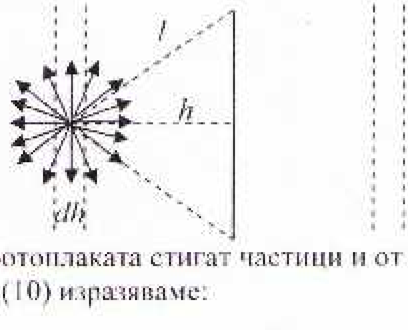
Кинетичната енергия на α-частицата е:

(7) $$E_{\alpha} = \frac{M_{\mathrm{Po}}(M_{\mathrm{Rn}} - M_{\mathrm{Po}} - M_{\alpha})c^2}{(M_{\mathrm{Po}} + M_{\alpha})} = 6{,}30\ \mathrm{MeV}.$$ **[1 т]**

б) Разглеждаме тънък слой въздух с площ S, дебелина dh, на разстояние h от фотоплаката. За време t в него ще протекат:

(8) $$dN_0 = AtSdh$$ **[0,5 т]**

разпадания. До равнината на фотоплаката ще стигнат само тези α–частици, които трябва да изминат разстояние, по-малко от l. Това са частиците, чиито начални скорости лежат в пространствен ъгъл, съответстващ на конус с образуваща l и височина h. Техният брой е:



(9) $$dN = dN_0\frac{\Omega}{4\pi} = \frac{1}{2}AtS\left(1 - \frac{h}{l}\right)dh$$ **[0,5 т]**

Общият брой частици, достигнали фотоплаката е:

(10) $$N = 2\int_0^l \frac{1}{2}AtS\left(1 - \frac{h}{l}\right)dh = \frac{1}{2}AtSl.$$ **[1 т]**

Множителят 2 пред интеграла отчита факта, че до фотоплаката стигат частици и от симетрично разположения слой. От съотношението (10) изразяваме:

235
(334)

(11) $$A = \frac{2N}{tSl}$$ **[0,5 т]**

Като вземем предвид, че $l = 0,285E^{\frac{3}{2}} = 4,51$ cm, пресмятаме:

(12) $$A = 2,22.10^3\ \mathrm{s^{-1}m^{-3}}.$$ **[0,5 т]**

в) Ако не възникваха нови ядра радон, концентрацията на вече съществуващите ядра би намалявала по закона:

(13) $$n(t) = n_0 / 2^{\frac{t}{T}} = n_0 \exp\left(-\frac{\ln 2}{T}t\right).$$ **[0,5 т]**

Обемната активност по определение е:

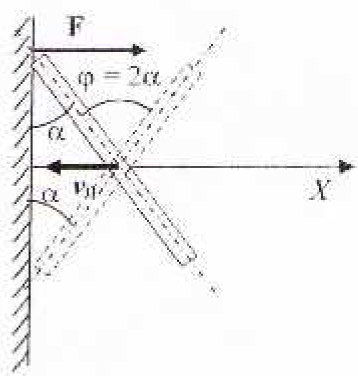
(14) $$A = -\frac{dn(t)}{dt} = \frac{\ln 2}{T}n(t)$$ **[0,5 т]**

и зависи от моментната концентрация на радона. Оттук намираме търсената концентрация:

(15) $$n = \frac{AT}{\ln 2} = 1,60.10^5\ \mathrm{m^{-3}}.$$ **[1 т]**

Задача 2. а) По време на удара на пръчката действа сила на реакция $F(t)$, насочена перпендикулярно на стената. Под нейно действие x-компонентата на импулса на пръчката се изменя по време на удара е:

(1) $$\Delta p_x = \int F(t)dt \equiv J,$$ **[0,5 т]**



където с J е означен импулсът на силата.

Компонентата на импулсът преди удара е:

(2) $$p_{0x} = -mv_0,$$ **[0,5 т]**

а след удара –

(3) $$p_x = mv_x.$$ **[0,5 т]**

Следователно:

(4) $$m(v_x + v_0) = J.$$ **[0,5 т]**

По време на удара силата на реакция създава въртящ момент спрямо центъра на пръчката:

(5) $$M(t) = F(t)\frac{l}{2}\cos\alpha,$$ **[0,5 т]**

който води до промяна на момента на импулса на пръчката:

(6) $$\Delta L = \int M(t)dt = \frac{l}{2}\cos\alpha\int F(t)dt = \frac{Jl\cos\alpha}{2}.$$ **[0,5 т]**

При извода на второто равенство сме отчели, че ъгълът α практически не се променя по време на удара. Понеже началният момент на импулса е нулев, уравнение (6) приема вида:

(7) $$\frac{1}{12}ml^2\omega = \frac{Jl\cos\alpha}{2}.$$ **[0,5 т]**

Като заместим израза за J от уравнение (4), намираме окончателно:

(8) $$v_x + v_0 = \frac{l}{6\cos\alpha}\omega.$$ **[1 т]**

236
(335)

б) Понеже ударът е идеално еластичен, механичната енергия на пръчката се запазва:

(9) $$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{12}ml^2\right)\omega^2 + \frac{mv_x^2}{2}.$$ **[1 т]**

След групиране на членовете в уравнението, получаваме:

(10) $$\left(v_0^2 - v_x^2\right) = \frac{l^2\omega^2}{12}.$$

Разделяме почленно уравнение (10) на уравнение (8) и намираме:

(11) $$v_0 - v_x = \frac{l\cos\alpha}{2}\omega.$$

След решаване на системата уравнения (8) и (11) получаваме изрази за скоростта и ъгловата скорост след удара:

(12) $$v_x = v_0\frac{1-3\cos^2\alpha}{1+3\cos^2\alpha}$$ **[1 т]**

(13) $$\omega = \frac{12v_0\cos\alpha}{l(1+3\cos^2\alpha)},$$ **[1 т]**

в) Центърът на пръчката е неподвижен след удара, ако $\cos\alpha = 1/\sqrt{3}$ при, т.е. при ъгъл:

(14) $$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0{,}955 \text{ rad } (54{,}7°).$$ **[0,5 т]**

г) При $\alpha = \alpha_0$ след първия удар пръчката се върти около неподвижния си център с ъглова скорост:

(15) $$\omega = \frac{2\sqrt{3}v_0}{l}.$$ **[0,5 т]**

В момента на втория удар пръчката сключва със стената ъгъл α_0. Следователно между двата удара пръчката се завърта на ъгъл:

(16) $$\varphi = 2\alpha_0.$$ **[0,5 т]**

Времето между двата удара е:

(17) $$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{l\alpha_0}{v_0\sqrt{3}} = 1{,}10.10^{-2}\text{ s}.$$ **[1 т]**

Задача 3. а) От кривата намираме, че излъчвателната способност е максимална при $\lambda_0 \approx 580$ nm $= 5{,}8.10^{-7}$ m. От закона на Вин определяме температурата на тялото:

(1) $$T = \frac{b}{\lambda_0} \approx 5000\text{ K}.$$ **[0,5 т]**

Графичната грешка при определяне на λ_0 е $\Delta\lambda = 25$ nm. По формулите за разпространение на грешка, намираме:

(2) $$\Delta T = \frac{b}{\lambda^2}\Delta\lambda \approx 200\text{ K}.$$ **[0,5 т]**

Окончателният резултат може да бъде записан:

(3) $$T = (5{,}0 \pm 0{,}2).10^3\text{ K}.$$ **[1 т]**

б) Интензитетът на светлината, излъчена във видимия диапазон е:

(4) $$J_{vis} = \int_{400}^{750} \varepsilon(\lambda) d\lambda .$$ **[0,5 т]**

Този интеграл може да бъде оценен графично като площта, заградена от графиката в интервала от 400 до 750 nm. За целта изброяваме, че под графиката се намират N_1 = 127 клетки от координатната мрежа, а графиката пресича N_2 = 8 клетки. На една клетка съответства интензитет:

(5) $$\Delta J = 50\ \text{nm} \,.\, 2000\ \text{W.m}^{-2}\,.\text{nm}^{-1} = 10^5\ \text{W/m}^2$$ **[0,5 т]**

Тогава оценяваме площтта под графиката, като на пресечените клетки съпоставяме половината от ΔJ:

(6) $$J_{vis} \approx \left(N_1 + \frac{N_2}{2} \right) \Delta J = 1{,}31.10^7\ \text{W/m}^2$$ **[1 т]**

От закона на Стефан-Болцман намираме пълния интензитет на топлинно излъчване:

(7) $$J_{tot} = \sigma T^4 = 3{,}51.10^7\ \text{W/m}^2.$$ **[0,5 т]**

Относителният дял на видимото излъчване е:

(8) $$\eta = \frac{J_{vis}}{J_{tot}} \approx 0.37 .$$ **[0,5 т]**

Графичната грешка при определяне на интензитета във видимия диапазон се определя от броя на клетките, пресечени от крафиката:

(9) $$\Delta J_{vis} = \frac{N_2 \Delta J}{2} .$$ **[0,5 т]**

Грешката при определяне на пълния интензитет се дължи на грешката на температурата:

(10) $$\Delta J_{tot} = 4\sigma T^3 \Delta T$$ **[0,5 т]**

Относителната грешка на крайния резултат е:

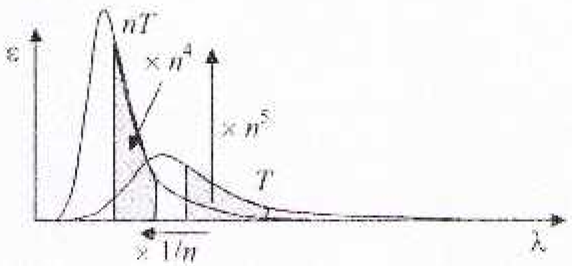
(12) $$\frac{\Delta \eta}{\eta} = \frac{\Delta J_{vis}}{J_{vis}} + \frac{\Delta J_{tot}}{J_{tot}} = \frac{N_2}{(2N_1 + N_2)} + \frac{4\Delta T}{T} = 0{,}19$$ **[0,5 т]**

Следователно $\Delta\eta \approx 0{,}05$ и крайният резултат се записва като:

(13) $$\eta = 0{,}37 \pm 0{,}07 .$$ **[1 т]**

Забележка. Според формулата на Планк $\varepsilon(\lambda) = \dfrac{2\pi h c^2}{\lambda^5 \left(\exp\left(\dfrac{hc}{kT\lambda} \right) - 1 \right)}$. Прецизното числено интегриране на тази функция дава резултат $1{,}283.10^7$ W/m^2 и съответно $\eta = 0.3655$.

в) От закона на Вин следва, че при два пъти по-висока температура, T = 10 000 K, максимумът на излъчвателната способност се премества от 580 nm на 290 nm. Кривата на излъчвателната способност при 10 000 K се получава от кривата, съответстваща на температура 5000 K при отместване на всички точки към два пъти по-малка дължина на вълната и $2^5 = 32$ пъти по-голяма стойност на ε, така че общият интензитет на излъчването нараства 2^4 пъти.



Следователно относителният дял на излъчването в интервале 400 – 750 nm при температура 10 000 K е равен на относителния дял на излъчването в интервала 800 – 1500 nm при температура 5000 K. Като използваме наличната графика:

(14) $$J_{400-750}(10\,000\ \mathrm{K}) = 16 J_{800-1500}(5000\ \mathrm{K})$$ **[1 т]**

От графиката, съответстваща на $T = 5000$ K, намираме: $N_1 = 116$, $N_2 = 16$ и съответно:

(15) $$J_{400-750}(10\,000\ \mathrm{K}) = 16\left(N_1 + \frac{N_2}{2}\right)\Delta J = 1{,}99.10^8\ \mathrm{W/m^2}.$$ **[0,5 т]**

От закона на Стефан-Болцман определяме пълния интензитет на излъчването при 10 000 K:

(16) $$J(10\,000\ \mathrm{K}) = \sigma T^4 = 5{,}67.10^8\ \mathrm{W/m^2}.$$ **[0,5 т]**

Окончателно намираме, че Вега излъчва във видимия диапазон относителна част от енергия:

(17) $$\eta = \frac{1{,}99.10^8}{5{,}67.10^8} = 0{,}35 - 35\ \%.$$ **[0,5 т]**