

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика
Сливен, 16 – 18 март 2007 г.
Решения на темата за 11 - 12 клас

Задача 1. Циркови номера.

а) тъй като дъската действа като лост от първи род

$$F_1 l_1 = F_2 l_2, \text{ следователно}$$

$$\frac{F_2}{F_1} = \frac{l_1}{l_2}. \quad [1 \text{ т}] \quad (1.1)$$

б) тъй като $\Delta p_{1,2} = F_{1,2} \cdot \Delta t$, то

$$\frac{\Delta p_2}{\Delta p_1} = \frac{F_2}{F_1} = \frac{l_1}{l_2} \quad [1 \text{ т}] \quad (1.2)$$

в) когато и двамата акробати са неподвижни спрямо дъската, те се въртят заедно с дъската с една и съща ъглова скорост ω спрямо неподвижната точка на дъската. Тогава

$$\omega = \frac{v_2}{l_2} = \frac{v_1}{l_1}, \text{ следователно}$$

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{l_2}{l_1} \quad [1 \text{ т}] \quad (1.3)$$

г) скоростта v_2 на излитане на втория акробат може да се намери от получените уравнения (1.1), (1.2) и (1.3). Нека скоростта на първия акробат в момента на докосване на дъската да е v_0 , в момента на отскачането на втория акробат да е v_1 , а на втория акробат тогава да е v_2 . От (1.2) следва

$$m_2 v_2 l_2 = m_1 (v_0 - v_1) l_1 \quad [1 \text{ т}] \quad (1.4)$$

Използвайки (1.3), (1.4) се преобразува до

$$m_2 v_2 l_2 = m_1 (v_0 - \frac{v_2 l_2}{l_1}) l_1 \quad (1.5)$$

От (1.5) за v_2 намираме

$$v_2 = \frac{v_0}{\frac{m_2 l_2}{m_1 l_1} + 1} \quad [2 \text{ т}] \quad (1.6)$$

д) за да отскочи вторият акробат на максимална височина h_2 , трябва скоростта му на отскачане v_2 да е максимална. Следователно се търси такава дължина l_1 при фиксирани останали параметри в (1.6) така, че v_2 да е максимална. Нека за краткост да въведем $\frac{m_2}{m_1} = k$ и

$\frac{l_2}{l_1} = x$. (1.6) се преобразува до

$$v_2 = \frac{v_0}{kx + \frac{1}{x}} \quad (1.7)$$

Функцията $f(x) = kx + \frac{1}{x}$ трябва да има минимум. Нека той е равен на n . Тогава $n = kx + \frac{1}{x}$.

Решаваме спрямо x :

$$kx^2 - nx + 1 = 0 \quad (1.8)$$

Откъдето

$$x_{1,2} = \frac{n \pm \sqrt{n^2 - 4k}}{2k} \quad (1.9)$$

Тъй като изразът под радикала трябва да не е отрицателен

$$n^2 - 4k \geq 0, \text{ откъдето } n \geq 2\sqrt{k}. \text{ Следователно минимумът на } f(x) \text{ е } 2\sqrt{k} = 2\sqrt{\frac{m_2}{m_1}}.$$

Това е изпълнено за $x_1 = x_2 = \frac{n}{2k} = \frac{1}{\sqrt{k}} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}$. Следователно

$$l_1 = l_2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} \quad [3 \text{ т}] \quad (1.10)$$

е) максималната височина h_2 се определя от (1.6) използвайки (1.10). За скоростта v_2 се получава

$$v_2 = \frac{v_0}{\frac{m_2}{m_1} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}} = \frac{v_0}{2} \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} \quad (1.11)$$

Прилагайки закона за запазване на механичната енергия за крайните точки на полета на двамата акробати, получаваме

$$m_2 g h_2 = \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_2 v_0^2}{2} \frac{m_1}{4 m_2} = \frac{1}{4} \frac{m_1 v_0^2}{2} = \frac{1}{4} m_1 g h_1 \quad (1.12)$$

следователно

$$h_2 = \frac{h_1}{4} \frac{m_1}{m_2} \quad [1 \text{ т}] \quad (1.13)$$

Задача 2. Неизвестна леща.

а) основната формула за сферичната леща (при първоначални разстояния източник-леща и образ-леща съответно a_1 и b_1) е

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1} = \frac{1}{f} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.1)$$

Увеличението на лещата k_1 е свързано с a_1 и b_1 така:

$$k_1 = \frac{b_1}{a_1} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.2)$$

От тези две уравнения можем да получим

$$a_1 = f \frac{k_1 + 1}{k_1} \quad [1 \text{ т}] \quad (2.3)$$

$$b_1 = f(k_1 + 1) \quad [1 \text{ т}] \quad (2.4)$$

Формулите (2.3) и (2.4) важат и за екрана и лещата във второто положение:

$$a_2 = f \frac{k_2 + 1}{k_2} \quad (2.5)$$

$$b_2 = f(k_2 + 1) \quad (2.6)$$

б) за да се намали увеличението, екранът трябва да се премести в посока на лещата [0,5 т]. За да се фокусира наново образът, лещата да се премести в посока на екрана [0,5 т]. Тогава

$$a_1 - a_2 = x \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.7)$$

$$b_1 - b_2 = x + d \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.8)$$

Замествайки (2.3) – (2.6) в (2.7) и (2.8) получаваме

$$f \frac{k_1 - k_2}{k_1 k_2} = x \quad (2.9)$$

$$f(k_1 - k_2) = x + d \quad (2.10)$$

Замествайки (2.10) в (2.9)

$$\frac{x + d}{k_1 k_2} = x \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.11)$$

От друга страна отношението на увеличението е

$$\frac{k_1}{k_2} = N \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.12)$$

(2.11) и (2.12) са две уравнения за двете неизвестни k_1 и k_2 . Чрез тяхното делене и умножение едно на/с друго съответно получаваме

$$k_1 = \sqrt{\frac{N(x+d)}{x}} = \sqrt{\frac{2(8+113)}{8}} = \frac{11}{2} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.13)$$

$$k_2 = \sqrt{\frac{x+d}{Nx}} = \sqrt{\frac{8+113}{2.8}} = \frac{11}{4} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (2.14)$$

в) фокусното разстояние f на лещата намираме от (2.10)

$$f = \frac{x+d}{k_1 - k_2} = \frac{(8+113)cm}{\frac{11}{2} - \frac{11}{4}} = 44cm \quad [1 \text{ т}] \quad (2.15)$$

г) първоначалните разстояния източник-леща a_1 и образ-леща b_1 намираме съответно от (2.3) и (2.4):

$$a_1 = f \frac{k_1 + 1}{k_1} = 44cm \frac{\frac{11}{2} + 1}{\frac{11}{2}} = 52cm \quad [1 \text{ т}] \quad (2.16)$$

$$b_1 = f(k_1 + 1) = 44cm(\frac{11}{2} + 1) = 286cm \quad [1 \text{ т}] \quad (2.17)$$

Задача 3. Водородоподобни йони.

а) Когато електрон с маса m и заряд $-e$ обикаля по кръгова орбита с радиус r около ядро със заряд Ze , Кулоновата сила е центроостремителна сила:

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze.e}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad , \text{откъдето} \quad (3.1)$$

$$v = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{mr}} \quad [1 \text{ т}] \quad (3.2)$$

б) импулса p на електрона е

$$p = mv = \sqrt{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2 m}{r}} \quad [1 \text{ т}] \quad (3.3)$$

в) дължината на вълната λ на дьо Бройл на електрона е

$$\lambda = \frac{h}{p} = \sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 h^2 r}{Ze^2 m}} \quad [1 \text{ т}] \quad (3.4)$$

г) от даденото условие за квантуване следва

$$2\pi r_n = n\lambda_n = n\sqrt{\frac{4\pi\epsilon_0 h^2 r_n}{Ze^2 m}} \quad , \text{откъдето} \quad (3.5)$$

$$r_n = \frac{\varepsilon_0 h^2 n^2}{\pi Z e^2 m} \quad [1 \text{ т}] \quad (3.6)$$

д) енергията $E(n)$ на електрона в състоянието му, описвано с числото n , е равна на сумата от неговата кинетична и потенциална енергия:

$$E(n) = E_{кин} + E_{ном} = \frac{mv(r_n)^2}{2} - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze.e}{r_n} \quad [1 \text{ т}] \quad (3.7)$$

Използвайки (3.2) и (3.6) се получава

$$E(n) = -\frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Ze^2}{r_n} = -\frac{Z^2 e^4 m}{8\varepsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} \quad [1 \text{ т}] \quad (3.8)$$

е) дължината $\lambda_{m,n}$ на вълната на фотон, излъчен от йон He^+ при преход на електрон в него от състояние k в състояние n е равна на (за $\text{He}^+ Z = 2$ [1 т]):

$$\lambda_{m,n} = \frac{c}{\nu_{m,n}} = \frac{hc}{E(k) - E(n)} = \frac{8\varepsilon_0^2 h^3 c}{Z^2 e^4 m} \frac{1}{\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{k^2}\right)} \quad [1 \text{ т}] \quad (3.9)$$

ж) минималната дължина на вълната $\lambda_{\min}$ на фотон, излъчен от йон He^+ като резултат от електронен преход е между състояния с квантови числа $k = \infty$ и $n = 1$ [1 т]. Замествайки с дадените стойности, се получава

$$\begin{aligned} \lambda_{m,n} &= \frac{8(8,854 \cdot 10^{-12} \text{ F/m})^2 (6,626 \cdot 10^{-34} \text{ J.s})^3 (2,998 \cdot 10^8 \text{ m/s})}{2^2 (1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C})^4 (9,110 \cdot 10^{-31} \text{ kg})} \frac{1}{\left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{\infty^2}\right)} = \\ &= 22,8 \cdot 10^{-9} \text{ m} = 22,8 \text{ nm} \quad [1 \text{ т}] \end{aligned}$$