

Национално пролетно състезание по физика
Пловдив, 17 – 19.03.2006 г.

Примерни решения на задачите от Специалната тема

Задача 1. Разхлабена струна

а) Законът за движение на шайбата по y се получава от уравнението на стоящата вълна при $x = L$:

$$(1) \quad y(t) = A \sin(kL) \sin(\omega t). \quad [0,25 \text{ т.}]$$

Ускорението на шайбата е втора производна на отклонението по времето:

$$(2) \quad a(t) = y''(t) = -\omega^2 A \sin(kL) \sin(\omega t). \quad [0,25 \text{ т.}]$$

За да изразим ускорението чрез зададените параметри, използваме съотношението:

$$(3) \quad \lambda v = c. \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Оттук получаваме:

$$(4) \quad \omega = 2\pi v = \frac{2\pi c}{\lambda} = kc \quad [0,5 \text{ т.}]$$

Използваме формулата за скорост на напречните вълни и заместваме израза (4) за ω в уравнение (2):

$$(5) \quad a(t) = -\frac{k^2 T}{\mu} A \sin(kL) \sin\left(kt\sqrt{T/\mu}\right) \quad [0,5 \text{ т.}]$$

б) От II принцип на Нютон:

$$(6) \quad ma = -T \sin \alpha, \quad [1 \text{ т.}]$$

където α е ъгълът между допирателната към струната в десния ѝ край и оста x (фиг. 1.1). Машабът по y е силно увеличен. В действителност $A \ll L$, поради което този ъгъл е много малък и $\sin \alpha \approx \operatorname{tg} \alpha$, т. е.:

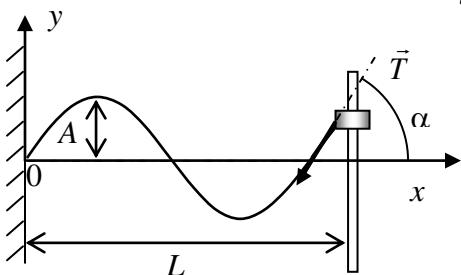
$$(7) \quad ma \approx -T \operatorname{tg} \alpha \quad [1 \text{ т.}]$$

От друга страна:

$$(8) \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = kA \cos(kL) \sin(\omega t). \quad [1 \text{ т.}]$$

Като заместим изразите (5) и (8) в уравнение (7), и след елементарни преобразования, получаваме:

$$(9) \quad \cotg(kL) = \frac{Mk}{\mu}. \quad [1 \text{ т.}]$$



Фиг. 1.1

в) За да намерим най-ниската (основна) честота ν на струната, е нужно да определим най-малката стойност на k , която удовлетворява условието за стояща вълна (9). Удобно е (но не е задължително) да въведем помощна безразмерна променлива $x = kL$. Тогава уравнение (9) се записва във вида:

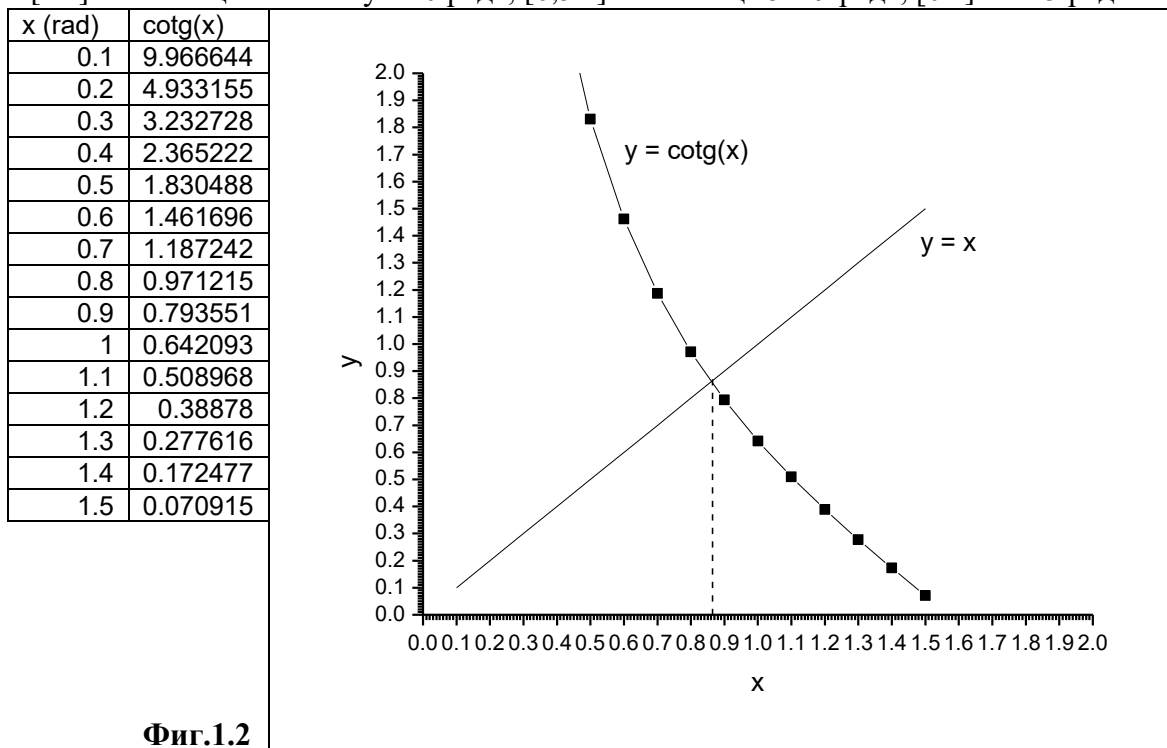
$$(10) \quad \cotg(x) = \frac{Mx}{\mu L}.$$

При зададените числени стойности установяваме, че $\mu L = M$ и уравнението за определяне на x се упрости допълнително:

$$(11) \quad \cotg(x) = x.$$

За да намерим най-малкия корен на това уравнение, е достатъчно да построим върху милиметрова хартия графиките на функциите $y = \cotg(x)$ и $y = x$ в интервала $(0; \pi/2)$. За целта пресмятаме функцията $y = \cotg(x)$ в поне 10 точки и построяваме нейната графика. Графиката на функцията $y = x$ е ъглополовяща на I квадрант (фиг. 1.2).

[1 т] за таблица с минимум 10 реда, [0,5 т] за таблица 5 – 9 реда, [0 т] за < 5 реда



Фиг.1.2

[1 т] за правилно нанесени точки върху графиката.

От пресечната точка на графиките намираме:

$$x \approx 0.86 \text{ или } k = x/L \approx 1,7 \text{ m}^{-1}. \quad [1 \text{ т}] \text{ за две верни значещи цифри}$$

За честотата имаме:

$$\nu = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{kc}{2\pi} = \frac{x}{2\pi L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}, \quad [0,5 \text{ т}]$$

откъдето:

$$\nu \approx 19,4 \text{ Hz}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Задача 2. Ако имаше магнитни заряди

а) Сравняваме изразите за големината на магнитната индукция на точков магнитен заряд с израза за магнитната индукция на малък участък с дължина dl от проводник, по който тече ток I :

$$B = \frac{\mu_0 g}{4\pi r^2} \text{ (точков заряд)} \quad \text{и} \quad dB = \frac{\mu_0 I dl \sin \theta}{4\pi r^2} \text{ (токов елемент)}. \quad [1 \text{ т}]$$

Оттук следва, че:

$$[g] = \text{A.m} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже $1 \text{ A} = 1 \text{ C/s}$, следва, че единицата за магнитен заряд в SI е:

$$[g] = \text{C.m/s}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

б) Като използваме теоремата на Гаус за полето в “магнитния кондензатор”, получаваме за магнитната индукция в кондензатора:

$$(1) \quad B = \mu_0 \gamma, \quad [1 \text{ т}]$$

където $\gamma = g/S$ е повърхнинната плътност на магнитния заряд върху положителната площ. От втория принцип на Нютон:

$$(2) \quad \frac{mv^2}{R} = evB \quad [0,25 \text{ т}]$$

намираме радиуса на орбитата на електрона:

$$(3) \quad R = \frac{mv}{eB} = \frac{mv}{\mu_0 e \gamma}. \quad [0,25 \text{ т}]$$

От условието за квантуване на Бор за момента на импулса на електрона е изпълнено:

$$(4) \quad mvR = \frac{nh}{2\pi}. \quad [1 \text{ т}]$$

От уравнения (3) и (4) следва:

$$(5) \quad \mu_0 e \gamma R^2 = \frac{nh}{2\pi}.$$

Площта на електронната орбита е $S = \pi R^2$, а общият заряд, който се съдържа в тази площ, е:

$$(6) \quad g = \gamma \pi R^2. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Като използваме уравнение (5), получаваме:

$$(7) \quad g = n \frac{h}{2\mu_0 e} \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Следователно пълният заряд е кратен на елементарен магнитен заряд:

$$(8) \quad g_e = \frac{h}{2\mu_0 e}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Като заместим с числените стойности на константите в системата SI, пресмятаме:

$$(9) \quad g_e = \frac{6,64 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}}{2,4 \cdot 10^{-7} \text{ H/m} \cdot 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \approx 1,65 \cdot 10^{-9} \text{ C.m/s}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

в) **1 вариант:** Когато зарядът е в точка с координата z , пръстенът огражда пространствен ъгъл с връх в заряда и с големина (вж. фиг. 2.1):

$$(10) \quad \Omega = 2\pi(1 - \cos \alpha) = 2\pi \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right)$$

Магнитният поток, който преминава през пръстена е:

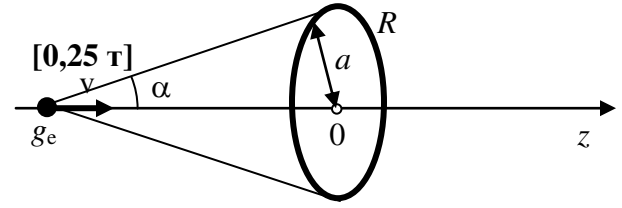
$$(11) \quad \Phi(z) = \frac{\mu_0 g \Omega}{4\pi} = \frac{\mu_0 g}{2} \left(1 + \frac{z}{\sqrt{z^2 + a^2}} \right).$$

Според закона на Фарадей, индуцираното ЕДН в пръстена е:

$$(12) \quad \mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d\Phi}{dz} \frac{dz}{dt} = -\frac{d\Phi}{dz} v, \quad [0,5 \text{ т}]$$

като сме отчели, че $v = dz/dt$. Като използваме уравнение (11) намираме:

$$(13) \quad \mathcal{E} = -\frac{\mu_0 g a^2 v}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad [1 \text{ т}]$$



Фиг. 2.1

2 вариант: Преминаваме към отправна система свързана с частицата. В тази система пръстенът се приближава към частицата със скорост $-v$.

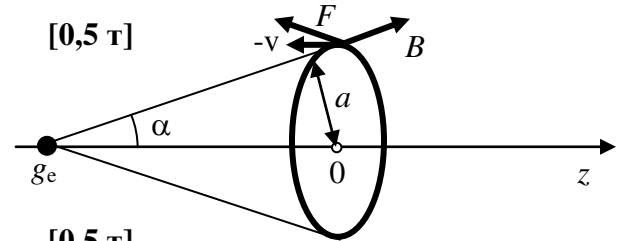
Всяка точка от пръстена се намира в магнитно поле с индукция:

$$(14) \quad B = \frac{\mu_0 g}{4\pi(z^2 + a^2)},$$

наклонена под ъгъл α спрямо оста z .

На свободен заряд с големина q от пръстена действа сила:

$$(15) \quad F = qvB \sin \alpha = \frac{\mu_0 g q a v}{4\pi(z^2 + a^2)^{3/2}}$$



Фиг. 2.2

При обход на пръстена в положително направление (по правилото на дясната ръка спрямо оста z) тази сила извършва работа:

$$(16) \quad A = -2\pi a F$$

и, следователно, води до индуциране на ЕДН:

$$(17) \quad \mathcal{E} = \frac{A}{q} = -\frac{\mu_0 g a^2 v}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad [1 \text{ т}]$$

Енергията, която се отделя в пръстена за време dt е

$$(18) \quad dQ = \frac{\mathcal{E}^2}{R} dt = \frac{\mathcal{E}^2}{vR} dz, \quad [0,5 \text{ т}]$$

където dz е преместването на частицата за същия интервал от време. Общото количество топлина е:

$$(19) \quad Q = \frac{\mu_0^2 g^2 a^4 v}{4R} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(z^2 + a^2)^3} = \frac{3\pi \mu_0^2 g^2 v}{32aR} \quad [0,5 \text{ т}]$$

Като вземем предвид израза за елементарния магнитен заряд, получаваме:

$$(20) \quad Q = \frac{3\pi h^2 v}{128e^2 a R} \quad [1 \text{ т}]$$

Задача 3. Икономично отопление

а) През бетона за единица време се пренася топлина:

$$(1) \quad P_{\delta} = k_1 \frac{ab - c^2}{d_1} (T_1 - T_2) \quad [0,5 \text{ т}]$$

а през стъклото на прозореца:

$$(2) \quad P_n = k_2 \frac{c^2}{d_2} (T_1 - T_2) \quad [0,5 \text{ т}]$$

Следователно, необходимата мощност на наглевателя е:

$$(3) \quad P = \left(k_1 \frac{ab - c^2}{d_1} + k_2 \frac{c^2}{d_2} \right) (T_1 - T_2) = 19,7 \text{ kW}. \quad [1 \text{ т}]$$

б) През бетона преминава същото количество топлина, като това, определено в (1). През двете стъкла и слоя въздух между тях преминава за единица време едно и също количество топлина P' . Следователно разликата в температурите между двете повърхности на всяко от съклата е:

$$(4) \quad \Delta T_c = \frac{d_2 P'}{k_2 c^2}, \quad [0,5 \text{ т}]$$

а между двата края на въздушния слой:

$$(5) \quad \Delta T_g = \frac{d_3 P'}{k_3 c^2}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Общата разлика в температурите между стаята и външния въздух, следователно е:

$$(6) \quad T_1 - T_2 = 2\Delta T_c + \Delta T_g = \frac{(2d_2/k_2 + d_3/k_3)P'}{c^2} \quad [1 \text{ т}]$$

Оттук намираме:

$$(7) \quad P' = \frac{c^2 (T_1 - T_2)}{(2d_2/k_2 + d_3/k_3)} \quad [1 \text{ т}]$$

Новата мощност на наглевателя е равна на пълното количество топлина, което преминава през стената за единица време:

$$(8) \quad P_1 = P_{\delta} + \frac{c^2 (T_1 - T_2)}{(2d_2/k_2 + d_3/k_3)} = 921 \text{ W}. \quad [1 \text{ т}]$$

в) Нека за време t работното вещество получава количество топлина Q_2 от външния въздух, а двигателят на помпата извършва работа $A = P_2 t$ за свиване на веществото. Тогава количеството топлина Q_1 , което работното вещество отдава на въздуха в стаята е:

$$(9) \quad Q_1 = Q_2 + P_2 t. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже помпата работи по цикъла на Карно, е изпълнено:

$$(10) \quad \frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2}. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Оттук намираме връзката:

$$(11) \quad P_2 t = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} Q_1 \quad [0,5 \text{ т}]$$

За да се поддържа постоянна температура в стаята, е нужно количеството топлина, което въздухът в стаята получава, да е равно на количеството топлина, което преминава за същото време през външната стена (в случай на двоен прозорец):

$$(12) \quad Q_1 = P_1 t. \quad [0,5 \text{ т}]$$

Следователно, мощността, която термопомпата консумира е:

$$(13) \quad P_2 = \frac{(T_1 - T_2)}{T_1} P_1 = 63 \text{ W}. \quad [1 \text{ т}]$$

От формули (1) и (8) следва, че консумираната мощност P_1 при директно отопление с електрически нагревател е пропорционална на разликата $(T_1 - T_2)$ между вътрешната и външната температури. Следователно, когато външната температура се повиши до 10°C , консумираната мощност от нагревателя намалява 2 пъти. [0,5 т]

От резултата (13) следва, че при зададена температура на въздуха в стаята, консумираната мощност P_2 от термопомпата е пропорционална $(T_1 - T_2)P_1$ т.е. на $(T_1 - T_2)^2$. Следователно, когато външната температура се повиши до 10°C , консумираната от термопомпата мощност намалява 4 пъти. [0,5 т]