

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика
Пловдив, 17 – 19 март 2006 г.
Тема за 10 клас
Решения на задачите

Задача 1. Човек и куче.

а) за да успее кучето да срещне човека по описания в условието начин, трябва времето t_k , за което кучето бяга до дървото, да е по-малко от времето t_q , за което човекът достига дървото:

$$t_k < t_q \quad [0,5 \text{ т}] \quad (1.1)$$

Тъй като $t_q = \frac{L}{u}$, а

$$t_k = 2\sqrt{\frac{2L}{a}} = 2\sqrt{\frac{L}{a}} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (1.2)$$

(времената и пътищата, за които кучето се движи равноускорително и равнозакъснително, са равни), то

$$2\sqrt{\frac{L}{a}} < \frac{L}{u}, \text{ откъдето} \quad (1.3)$$

$$a_{\min} > \frac{4u^2}{L} \quad [1 \text{ т}] \quad (1.4)$$

б) разстоянието d , което изминава човека до срещата с кучето, може да се пресметне по следния начин. Ако с t_1 означим времето, за което кучето стига дървото, а с t_2 - времето, за което кучето стига от дървото до човека, то

$$d = u(t_1 + t_2) \quad [0,5 \text{ т}], \text{ като} \quad (1.5)$$

$$t_1 = 2\sqrt{\frac{L}{a}} \quad [0,5 \text{ т}], \quad \text{а } t_2 = 2\sqrt{\frac{L-d}{a}} \quad [0,5 \text{ т}] \quad (1.6)$$

Замествайки (1.6) в (1.5), получаваме

$$d = u \left(2\sqrt{\frac{L}{a}} + 2\sqrt{\frac{L-d}{a}} \right) \quad [1 \text{ т}] \quad (1.7)$$

Преобразувайки (1.7) до

$$d - 2u\sqrt{\frac{L}{a}} = 2u\sqrt{\frac{L-d}{a}} \text{ и повдигайки двете страни на квадрат, получаваме}$$

$$d^2 - 4du\sqrt{\frac{L}{a}} + 4u^2 \frac{L}{a} = 4u^2 \frac{L-d}{a} \quad (1.8)$$

След съкращаване и прегрупиране на членовете, получаваме

$$d \left[d - 4u \left(\sqrt{\frac{L}{a}} - \frac{u}{a} \right) \right] = 0, \text{ откъдето} \quad (1.9)$$

$$d = 4u \left(\sqrt{\frac{L}{a}} - \frac{u}{a} \right) \quad [1,5 \text{ т}] \quad (1.10)$$

в) при дадените стойности: $L = 36 \text{ m}$, $u = 1 \text{ m/s}$ и $a = 4 \text{ m/s}^2$, от (1.10) за d се получава

$$d = 4.1 \text{ m/s} \left(\sqrt{\frac{36 \text{ m}}{4 \text{ m/s}^2}} - \frac{1 \text{ m/s}}{4 \text{ m/s}^2} \right) = 4 \cdot \left(3 - \frac{1}{4} \right) \text{ m} = 11 \text{ m} \quad [1 \text{ т}] \quad (1.11)$$

г) максималната скорост $V_{\max}$, която достига кучето, движейки се към човека е в точката – среда на изминатия път от дървото до човека т.е., когато кучето е изминало път $s = \frac{L-d}{2}$. [1 т] Тъй като

$$V_{\max} = \sqrt{2as} = \sqrt{2a \frac{(L-d)}{2}}, \text{ за } V_{\max} \text{ се получава} \quad (1.12)$$

$$V_{\max} = \sqrt{4 \text{ m/s}^2 (36 \text{ m} - 11 \text{ m})} = 10 \text{ m/s} \quad [2 \text{ т}] \quad (1.13)$$

Задача 2. Трупче върху клин, движещ се с ускорение.

а) след като съществува минимално ускорение, при което трупчето остава неподвижно следва, че в частен случай – ускорение нула, трупчето трябва да се хлъзга и естествено то ще се хлъзга надолу. Следователно силата на триене ще е насочена нагоре, което трябва да е вярно и при ускорение $a_{\min}$ и малко по-голямо от него. В този случай посоката и големината на силите съответстват на Фиг. 1а. Разлагайки ги в координатна система с оси x и y (виж Фиг. 1а) и отчитайки, че трупчето се движи с ускорение a надясно, трябва да са изпълнени следните равенства и неравенства:

$$R \cos \beta + F_{mp} \sin \beta = mg \quad (\text{равенство на проекциите на силите по } y) \quad (2.1)$$

$$R \sin \beta - F_{mp} \cos \beta = ma \quad (\text{II принцип на Нютон, приложен по } x) \quad (2.2)$$

$$F_{mp} \leq kR \quad (\text{условие за големина на силата на триене при покой}) \quad (2.3)$$

(за (2.1), (2.2) и (2.3) по [0,5 т])

Изразявайки $F_{тр}$ в (2.1) и (2.2) и използвайки (2.3), получаваме

$$F_{mp} = \frac{mg}{\sin \beta} - \frac{R \cos \beta}{\sin \beta} \leq kR \quad (2.4)$$

$$F_{mp} = -\frac{ma}{\cos \beta} + \frac{R \sin \beta}{\cos \beta} \leq kR \quad (2.5)$$

(2.4) и (2.5) могат да се преобразуват съответно до

$$R(\cos \beta + k \sin \beta) \geq mg \quad (2.6)$$

$$R(\sin \beta - k \cos \beta) \leq ma \quad (2.7)$$

Обединявайки двете неравенства, получаваме

$$\frac{ma}{\sin \beta - k \cos \beta} \geq R \geq \frac{mg}{\cos \beta + k \sin \beta} \quad (2.8)$$

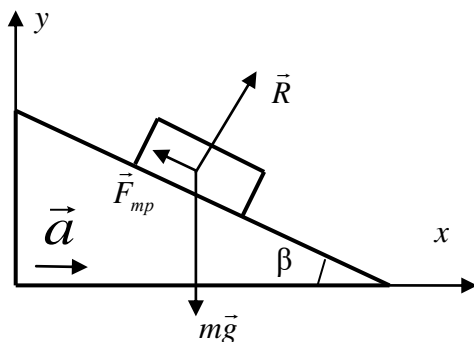
От (2.8) за a получаваме

$$a \geq g \frac{\sin \beta - k \cos \beta}{k \sin \beta + \cos \beta} \quad (2.9)$$

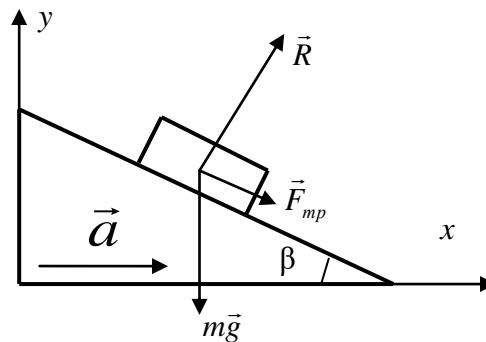
Следователно

$$a_{\min} = g \frac{\sin \beta - k \cos \beta}{k \sin \beta + \cos \beta} \quad [1,5 \text{ т}] \quad (2.10)$$

б) след като съществува максимално ускорение, при което трупчето остава неподвижно следва, че в частен случай – много голямо ускорение



Фиг. 1а



Фиг. 1б

(безкрайност), трупчето трябва да се хлъзга и то ще се хлъзга нагоре. Следователно силата на триене ще е насочена надолу, което трябва да е вярно и при ускорение $a_{\max}$ и малко по-малко от него. В този случай посоката и големината на силите съответстват на Фиг. 1б. Разлагайки ги в координатна система с оси x и y (виж Фиг. 1б) и отчитайки, че трупчето се движи с ускорение a надясно, трябва да са изпълнени следните равенства и неравенства:

$$R \cos \beta - F_{mp} \sin \beta = mg \quad (\text{равенство на проекциите на силите по } y) \quad (2.11)$$

$$R \sin \beta + F_{mp} \cos \beta = ma \quad (\text{II принцип на Нютон, приложен по } x) \quad (2.12)$$

$$F_{mp} \leq kR \quad (\text{условие за големина на силата на триене при покой}) \quad (2.13)$$

(за (2.11), (2.12) и (2.13) по [0,5 т])

Изразявайки $F_{тр}$ в (2.11) и (2.12) и използвайки (2.13), получаваме

$$F_{mp} = -\frac{mg}{\sin \beta} + \frac{R \cos \beta}{\sin \beta} \leq kR \quad (2.14)$$

$$F_{mp} = \frac{ma}{\cos \beta} - \frac{R \sin \beta}{\cos \beta} \leq kR \quad (2.15)$$

(2.14) и (2.15) могат да се преобразуват съответно до

$$R(\cos \beta - k \sin \beta) \leq mg \quad (2.16)$$

$$R(\sin \beta + k \cos \beta) \geq ma \quad (2.17)$$

Обединявайки двете неравенства, получаваме

$$\frac{ma}{\sin \beta + k \cos \beta} \leq R \leq \frac{mg}{\cos \beta - k \sin \beta} \quad (2.18)$$

От (2.18) за a получаваме

$$a \leq g \frac{\sin \beta + k \cos \beta}{-k \sin \beta + \cos \beta}, \text{ следователно} \quad (2.19)$$

$$a_{\max} = g \frac{\sin \beta + k \cos \beta}{-k \sin \beta + \cos \beta} \quad [1,5 \text{ т}] \quad (2.20)$$

в) ако $\beta = 45^\circ$ и $k = 1/2$, то замествайки в (2.10) и (2.20) се получава

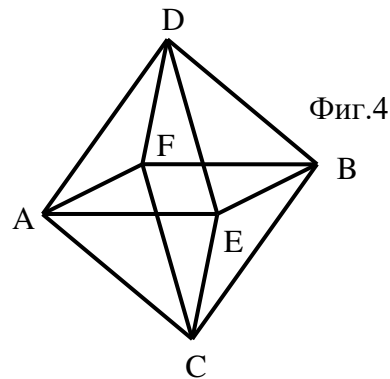
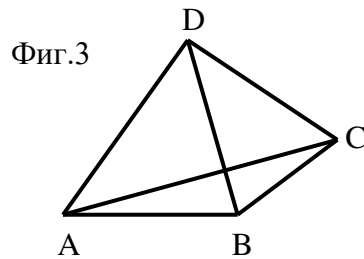
$$a_{\min} = g \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{g}{3} \quad [1 \text{ т}] \quad (2.21)$$

$$a_{\max} = g \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2}}{-\frac{1}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}} = 3g \quad [1 \text{ т}] \quad (2.22)$$

г) от (2.10) се вижда, че $a_{\min} = 0$, когато $k = \operatorname{tg} \beta$. Следователно при по-голям коефициент на триене от тази стойност, при произволно малко ускорение трупчето ще е неподвижно [0,5 т]. От (2.20) се вижда, че $a_{\max} = \infty$, когато $k = \operatorname{cotg} \beta$. Следователно при по-голям коефициент на триене от тази стойност, при произволно голямо ускорение трупчето ще е неподвижно [0,5 т]. Следователно за да остане трупчето неподвижно спрямо клина при произволни стойности на ускорението a , трябва k да е по-голямо и от $\operatorname{tg} \beta$, и от $\operatorname{cotg} \beta$ [1 т].

Задача 3. Платонови тела, направени от проводници (две независими подусловия).

А) Случай на тетраедър (Фиг. 3)



а) при подаване на напрежение между върховете A и B, тъй като проводниците AC и AD са еквивалентни, по тях ще протекат равни токове. Следователно напрежението U_{CD} между върховете C и D ще бъде нула и по проводника CD няма да протече ток [0,5 т]. Следователно, ако проводникът CD се прекъсне (или изобщо се махне от електрическата схема), съпротивлението между върховете A и B няма да се промени [0,5 т].

б) без проводника CD схемата представлява три успоредно свързани проводника (AB, ADB и ACB) съответно със съпротивления R , $2R$ и $2R$ [1 т]. Следователно измереното съпротивление R_{AB} между A и B ще бъде

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R}, \text{ откъдето} \quad (3.1)$$

$$R_{AB} = \frac{R}{2} \quad [1 \text{ т}] \quad (3.2)$$

Б) Случай на октаедър (Фиг. 4)

в) при подаване на напрежение между върховете C и D, тъй като групите проводници DA, DE, DB и DF от една страна, и AC, EC, BC и FC от друга страна, са еквивалентни, по тях ще протекат равни токове. Следователно напреженията U_{AE} , U_{EB} , U_{BF} и U_{FA} съответно между върховете A и E, E и B, B и F, и F и A ще бъдат нула и по проводниците AE, EB, BF и FA няма да протече ток [1 т]. Следователно, ако проводниците AE, EB, BF и FA се прекъснат (или изобщо се махнат от електрическата схема), съпротивлението между върховете C и D няма да се промени [1 т].

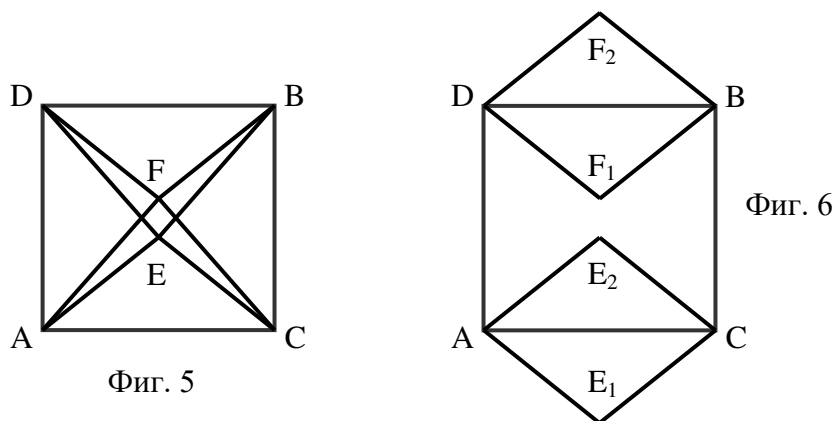
г) без проводниците AE, EB, BF и FA, схемата представлява четири успоредно свързани проводника (DAC, DEC, DBC и DFC), всеки със

съпротивление $2R$ [1 т]. Следователно измереното съпротивление R_{CD} между С и D ще бъде

$$\frac{1}{R_{CD}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{2}{R}, \text{ откъдето} \quad (3.3)$$

$$R_{CD} = \frac{R}{2} \quad [1 \text{ т}] \quad (3.4)$$

д) за да се намери съпротивлението R_{CA} между двата съседни върха С и А (без да се прекъсват никакви проводници) е удобно октаедъра да се “смачка” в равнина за да се види по-добре кои проводници са еквивалентни (поставени в еднакви условия и по тях ще текат равни токове). Това е направено на фиг. 5 (върховете Е и F са леко отместени за да се виждат по-добре).



От фиг. 5 се вижда, че групата проводници AE, EC, AF и FC, както и групата проводници DF, FB, DE и EB, са еквивалентни и във всяка група от тези проводници трябва да текат равни токове. Ако токовете по AE и EC са равни, можем мислено да “разкъсаме” точка E на две точки E_1 и E_2 и съпротивлението на схемата няма да се промени. Същото “разделяне” може да се направи и с точка F (на две точки F_1 и F_2). Така се стига до еквивалентната схема, представена на фиг. 6 [1 т]. На така получената схема лесно може да се определи съпротивлението, тъй като е съставена само от комбинации успоредно свързани и последователно свързани проводници.

Съпротивлението R_{DB} между точките D и B е съпротивлението на успоредно свързаните проводници DB, DF_1B и DF_2B , именно:

$$\frac{1}{R_{DB}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{2}{R} \quad (3.5)$$

Съпротивлението на клона ADBC е съпротивлението на последователно свързаните съпротивления R_{AD} , R_{DB} и R_{BC} . Следователно

$$R_{ADBC} = R_{AD} + R_{DB} + R_{BC} = R + \frac{R}{2} + R = \frac{5R}{2} \quad (3.6)$$

Цялото съпротивление между точките А и С е съпротивлението на успоредно свързаните R_{ADBC} , R_{AE_1C} , R_{AE_2C} и R_{AC} , следователно

$$\frac{1}{R_{ACsum}} = \frac{1}{R_{ADBC}} + \frac{1}{R_{AE_1C}} + \frac{1}{R_{AE_2C}} + \frac{1}{R_{AC}} = \frac{2}{5R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} + \frac{1}{R} = \frac{24}{10R} = \frac{12}{5R} \quad (3.7)$$

Следователно измереното съпротивление R_{CA} между двата съседни върха С и А ще бъде

$$R_{CA} = \frac{5}{12} R \quad [2\text{т}] \quad (3.8)$$