Министерство на образованието и науката
Национално състезание по физика, Шумен, 11.03 – 13.03 2005 г.
Примерни решения на задачите от специалната тема

Задача 1. ***Отскачане на камък от водна повърхност***

а) Равнодействащата сила е равна на векторната сума:

$$\hat{F} = m\hat{g} + \hat{N},$$

където $m\hat{g}$ е силата на тежестта, а $\hat{N}$ – силата на реакция, с която водата действа на камъка. Понеже налягането на водата е разпределено равномерно върху потопената повърхност на камъка, силата на реакция е насочена вертикално нагоре и големината ѝ е:

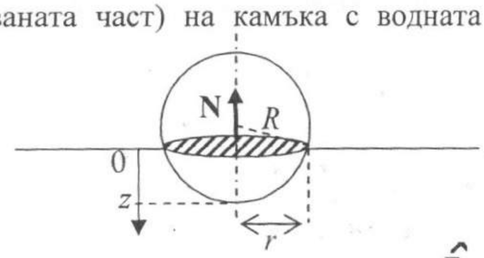
$$N = pS_{\perp} = C\rho v_0^2 S_{\perp}. \qquad [1\ т]$$

където $S_{\perp}$ е площта на напречното сечение (защрихованата част) на камъка с водната повърхност. Като вземем предвид, че:

$S_{\perp} = \pi r^2 = R^2 - (R-z)^2,$

намираме окончателно:

$F_z = mg - R = mg - \pi C\rho v_0^2\left(2Rz - z^2\right).$ [1 т]



б) Хоризонталната компонента v_x на скоростта на камъка не се променя, защото силата $\hat{F}$ е насочена вертикално:

$$v_x = v_0\cos\theta = \text{const}. \qquad [0{,}5\ т]$$

В момента на максимално потяпяне ($z = z_{max}$):

$$v_y = 0. \qquad [0{,}5\ т]$$

Промяната на кинетичната енергия на камъка, следователно, е:

$$\Delta K = \frac{m\left(v_0\cos\theta\right)^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} = -\frac{mv_0^2}{2}\sin^2\theta.$$

От друга страна:

$$\Delta K = W = \int_0^{z_{max}} F_z\,dz, \qquad [0{,}5\ т]$$

където W е работата, която извършва силата F при потапяне на камъка. След като извършим интегрирането, получаваме:

$$\frac{mv_0^2}{2}\sin^2\theta = \pi C\rho v_0^2\left(Rz_{max}^2 - \frac{z_{max}^3}{3}\right) - mgz_{max}. \qquad [0{,}5\ т]$$

След като решим уравнението спрямо v_0, намираме:

$$v_0 = \frac{\sqrt{6mgz_{max}}}{\sqrt{2\pi C\rho\left(3R - z_{max}\right)z_{max}^2 - 3m\sin^2\theta}}. \qquad [1\ т]$$

в) При зададена дълбочина z_{max} камъкът може да отскочи, ако изразът под квадратния корен в знаменателя, е положителен. Следователно:

$$\theta \le \arcsin\left[\sqrt{\frac{2\pi C\rho\left(3R - z_{max}\right)z_{max}^2}{3m}}\right]. \qquad [0{,}5\ т]$$

Изразът под корена нараства монотоно с увеличаване на z_{max}. Следователно максималният ъгъл на падане съответства на дълбочина на потапяне: $z_{max} = 2R$:

$$\theta_{\max} = \arcsin\left[\sqrt{\frac{8\pi C\rho R^3}{3m}}\right]. \qquad [1\ \text{т}]$$

След заместване с числените стойности намираме:

$$\theta_{\max} \approx \arcsin(0.409) \approx 24^\circ. \qquad [0{,}5\ \text{т}]$$

г) От уравнението за изменението на кинетичната енергия, при $\theta = 0$, получаваме:

$$0 = \pi C\rho v_0^2\left(Rz_{\max}^2 - \frac{z_{\max}^3}{3}\right) - mgz_{\max}$$

или

$$z_{\max}^2 - 3Rz_{\max} + \frac{3mg}{\pi C\rho v_0^2} = 0. \qquad [1\ \text{т}]$$

Уравнението има два корена, като максималната дълбочина на потапяне се определя от по-малкия корен:

$$z_{\max} = \frac{1}{2}\left\{3R - \sqrt{9R^2 - \frac{12mg}{\pi C\rho v_0^2}}\right\}. \qquad [0{,}5\ \text{т}]$$

За да може камъкът да отскочи, е необходимо уравнението да има реално решение за $z_{\max}$. Следователно дискриминантата на уравнението трябва да е положителна:

$$9R^2 - \frac{12mg}{\pi C\rho v_0^2} \geq 0,$$

откъдето окончателно намираме:

$$v_{\min} = \sqrt{\frac{4mg}{3\pi C\rho R^2}}. \qquad [1\ \text{т}]$$

След заместване с числените стойности пресмятаме:

$$v_{\min} \approx 1{,}44\ \text{m/s}. \qquad [0{,}5\ \text{т}]$$

Задача 2. ***Образуване на облаци***

А) От графиката определяме, че при $t_0 = 27\ ^\circ\text{C}$ ($T_0 = 300$ K), налягането на наситените водни пари е:

$$P_s = 3{,}6.10^3\ \text{Pa}. \qquad [0{,}2\ \text{т}]$$

От дефиницията на относителна влажност следва, че парциалното налягане на водните пари във въздуха е:

$$P_v = \eta P_s = 1{,}8.10^3\ \text{Pa}. \qquad [0{,}2\ \text{т}]$$

За определен обем V въздух, от закона на Клапейрон-Менделеев следва:

$$P_v V = n_v RT_0, \qquad [0{,}2\ \text{т}]$$

където n_v е броят молове водни пари, които се съдържат в обема. Понеже масата на водните пари в избрания обем, е

$$m_v = n_v M,$$

получаваме:

$$m_v = \frac{P_v MV}{RT_0} \qquad [0{,}2\ \text{т}]$$

и намираме абсолютната влажност на въздуха:

$$\rho = \frac{P_v M}{RT_0} \qquad [0{,}5\ \text{т}]$$

$$\rho = 1{,}3.10^{-2}\ \text{kg/m}^3. \qquad [0{,}5\ \text{т}]$$

Според закона на Далтон, налягането P_0 на въздуха в дадения обем V се определя от общия брой молове n в обема:

$$P_0 V = nRT_0. \qquad [0{,}2\ \text{т}]$$

Следователно, относителната моларна концентрация на водните пари е:

$$x = \frac{n_v}{n} = \frac{P_v}{P_0} \qquad [0,5 \text{ т}]$$

$$x = 1,8.10^{-2} = 1,8\ \%. \qquad [0,5 \text{ т}]$$

Б) Разглеждаме обем въздух V_0 на морското ниво, където неговото налягане е P_0, а абсолютната му температура – T_0. На дадена височина h, където атмосферното налягане е P, същото количество въздух заема обем V, такъв че:

$$PV^{\gamma} = P_0V_0^{\gamma}. \qquad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже $V \sim T/P$, където T е температурата на въздуха на същата височина, намираме:

$$\frac{T^{\gamma}}{P^{\gamma-1}} = \frac{T_0^{\gamma}}{P_0^{\gamma-1}}$$

или

$$P = P_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\gamma/(\gamma-1)} = P_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{7}{2}}. \qquad [0,5 \text{ т}]$$

Понеже относителната моларна концентрация на парите не се променя при издигане на въздуха, за парциалното налягане на водните пари при температура T получаваме:

(1) $$P_v = xP = xP_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{\frac{7}{2}}. \qquad [1,0 \text{ т}]$$

В) Облаци започват да се образуват, когато въздухът се охлади до температура T, такава, че:

$$P_v(T) = P_s(T).$$

За да определим температурата на въздуха, при която парите кондензират, преобразуваме зависимостта (1) в зависимост от Целзиевата температура t:

$$P_v = 1,8.10^3\left(\frac{t+273}{300}\right)^{3,5} \text{ Pa}. \qquad [0,5 \text{ т}]$$

Ако разгледаме относителното изменение на температурата $(t-27)/300$ като малка величина, получаваме приблизително:

$$P_v \approx 1,8.10^3\left(1 + 3,5\frac{(t-27)}{300}\right) \text{ Pa}. \qquad [0,5 \text{ т}]$$

Построяваме графика на тази функция на фиг. 2, *а*, и по пресечната й точка с графиката на зависимостта $P_s(t)$ намираме температурата на кондензация: [1,0 т]

$$t \approx 13\ °\text{C} \qquad [1,0 \text{ т}]$$

и съответното парциално налягане на водните пари:

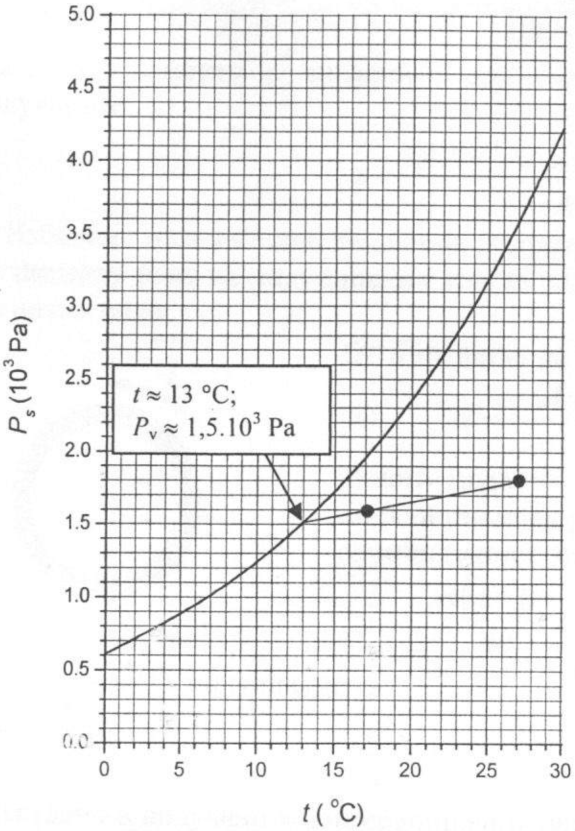
$$P_v \approx 1,5.10^3 \text{ Pa}. \qquad [0,5 \text{ т}]$$

Атмосферното налягане съответно е:

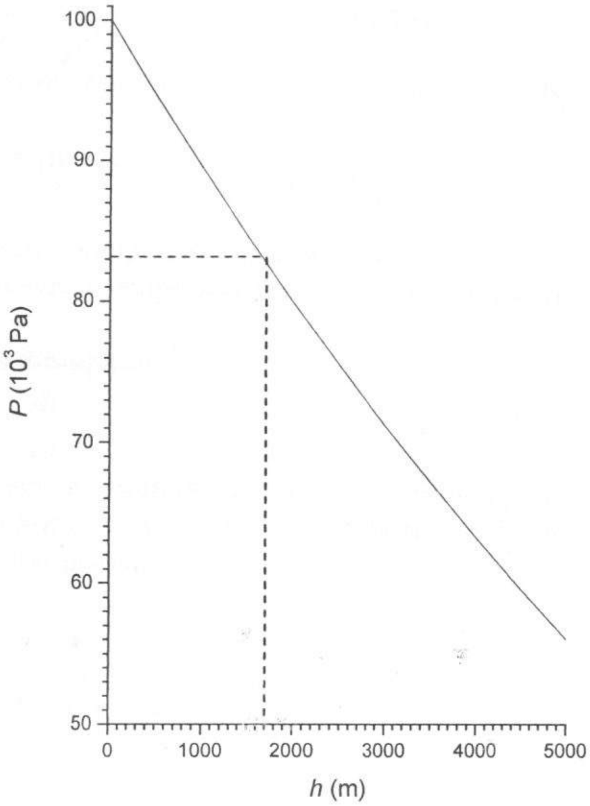
$$P = \frac{P_v}{x} \approx 83.10^3 \text{ Pa}. \qquad [0,5 \text{ т}]$$

От фиг. 2, *б* намираме височината, на която атмосферното налягане има тази стойност, т. е. височината, на която парите кондензират и се образуват облаци: [0,5 т]

$$h \approx 1700 \text{ m}. \qquad [0,5 \text{ т}]$$



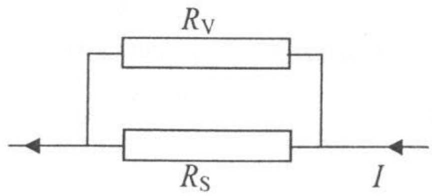
Фиг. 2, *а*



Фиг. 2, *б*

Задача 3. ***Свръхпроводящ ли е свръхпроводникът?***

А) Даденият тип свързване е еквивалентен на следната схема:



[0,2 т]

където:

$$R_S = \frac{\rho d}{ab}$$ [0,2 т]

е съпротивлението на слоя свръхпроводящо вещество между двата електрода. Следователно, при зададен ток I напрежението между електродите е:

$$U = \frac{R_S R_V}{R_S + R_V} I \,.$$ [0,2 т]

Понеже $U < U_{\min}$, получаваме

$$\frac{R_S R_V}{R_S + R_V} I < U_{\min}$$ [0,2 т]

или

$$R_S < \frac{U_{\min} R_V}{I R_V - U_{\min}} \,.$$ [0,2 т]

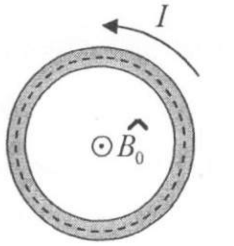
От последното неравенство намираме:

$$\rho < \frac{U_{\min} R_V ab}{\left(IR_V - U_{\min}\right)d}. \qquad [0{,}5 \text{ т}]$$

След като заметим с числените стойности, и като вземем предвид, че $U_{\min} << IR_{\mathrm{V}}$, получаваме:

$$\rho < \frac{1{,}0.10^{-4}\ \mathrm{V}\,.\,2.10^{-6}\ \mathrm{m}\,.\,5.10^{-6}\ \mathrm{m}}{0{,}1\,\mathrm{A}\,.\,0{,}01\,\mathrm{m}} = 1{,}0.10^{-12}\ \Omega.\mathrm{m}. \quad [0{,}5 \text{ т}]$$

Б) Избираме положителна посока на индуцирания ток, съобразена с правилото на Ленц, т. е. магнитното поле на индуцирания ток се стреми да компенсира намаляването на външното магнитно поле:



От II правило на Кирхов намираме:

(1) $$RI = -\frac{d\left(\pi r^2 B\right)}{dt} - L\frac{dI}{dt}, \qquad [1 \text{ т}]$$

където първото събираемо в дясната част е ЕДН, индуцирано поради промяна на външното магнитно поле, а второто – ЕДН на самоиндукция. Като вземем предвид, че:

$$\frac{d\left(\pi r^2 B\right)}{dt} = \pi r^2 \frac{dB}{dt} = -\pi r^2 \frac{B_0}{t_0} \qquad [0{,}5 \text{ т}]$$

и заместим в (1), получаваме:

(2) $$L\frac{dI}{dt} + RI = \frac{\pi r^2 B_0}{t_0} \qquad [0{,}5 \text{ т}]$$

Заместваме в полученото диференциално уравнение израза за тока $I(t)$, зададен в условието, и получаваме следното равенство:

(3) $$\left(\lambda L - R\right)Ae^{-\lambda t} + AR = \frac{\pi r^2 B_0}{t_0}. \qquad [0{,}5 \text{ т}]$$

Понеже изразът в дясната страна не зависи от времето, за коефициента λ е изпълнено:

(4) $$\lambda = \frac{R}{L}. \qquad [0{,}5 \text{ т}]$$

От друга страна, за да бъде изпълнено равенството (3), е необходимо:

(5) $$A = \frac{\pi r^2 B_0}{Rt_0}. \qquad [0{,}5 \text{ т}]$$

В момента на изключване на магнитното поле ($t = t_0$) големината на тока през намотката е:

(6) $$I_0 = \frac{\pi r^2 B_0}{Rt_{\grave{a}}}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t_0}\right). \qquad [0{,}5 \text{ т}]$$

Ако съпротивлението на намотката е много малко, изразът в скобите е приблизително:

$$1 - e^{-\frac{R}{L}t_0} \approx \frac{Rt_0}{L},$$

и след като заместим в (6) намираме:

(7) $$I_0 = \frac{\pi r^2 B_0}{L}. \qquad [0{,}5 \text{ т}]$$

При зададения размер на жичката, намираме, че индуктивността на намотката е:

$$L = 4\pi.10^{-7}\ \mathrm{H/m}\,.1{,}0.10^{-2}\ \mathrm{m}\,.\left(\ln(20) + 0{,}23\right) \approx 4{,}1.10^{-8}\ \mathrm{H},$$

откъдето пресмятаме тока I_0:

$$I_0 = 7{,}7\ \mathrm{A}. \qquad [0{,}5 \text{ т}]$$

В) След изключване на магнитното поле, ЕДН в намотката се дължи единствено на самоиндукция и промяната на тока се описва с уравнението:

(8) $$RI = -L\frac{dI}{dt}.$$ [0,5 т]

Следователно, токът намалява по експоненциален закон:

(9) $$I = I_0 e^{-\frac{R}{L}t}.$$ [0,5 т]

Понеже относителното изменение на тока е малко, можем да запишем:

$$e^{-\frac{R}{L}t} \approx 1 - \frac{R}{L}t,$$

откъдето получаваме:

(10) $$\frac{RI_0 t}{L} \approx I_0 - I.$$ [0,5 т]

Тъй като $I_0 - I < 0,01I$, следва, че:

(11) $$\frac{Rt}{L} < 0,01.$$ [0,5 т]

Като вземем предвид, че $R = \frac{\rho(2\pi r)}{\pi a^2} = \frac{2\rho r}{a^2}$, за горната граница на ρ получаваме:

(12) $$\rho < \frac{0,005La^2}{rt}.$$ [0,5 т]

При $L = 4,1.10^{-8}$ H и $t = 1$ h = 3600 s, намираме:

$$\rho < 1,4.10^{-18}\ \Omega.\text{m}$$ [0,5 т]