

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика
Шумен, 11 – 13 март 2005 г.
Решения на задачите за 11-12 клас

Задача 1. Топче, падащо в кладенец.

а) Тъй като ударите в цилиндричната стена на кладенеца са идеално еластични, скоростта на топчето (следователно и неговата кинетична енергия) непосредствено преди и след удара се запазва по големина. За цялото падане може да се приложи закона за запазване на пълната механична енергия:

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgh = \frac{mv_1^2}{2}, \quad (1)$$

откъдето $v_1 = \sqrt{v_0^2 + 2gh}$ [1 т] $= \sqrt{9^2 + 2 \cdot 10 \cdot 80} \text{ m/s} = 41 \text{ m/s}$ [1 т]

б) По вертикалната ос у топчето се движи равноускорително с ускорение g (при ударите в стената вертикалната компонента на скоростта не се променя). От закона за скоростта $v = v_{0y} + gt$ и закона за пътя $y = v_{0y}t + \frac{1}{2}gt^2$, при $v_{0y} = 0$, може да се намери времето за падане:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \quad [1 \text{ т}] = \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{10}} \text{ s} = 4 \text{ s} \quad [1 \text{ т}]. \quad (2)$$

в) По хоризонталната ос х топчето се движи с постоянна по големина скорост (при ударите се сменя само нейната посока). Броят удари N в цилиндричната стена зависи от изминатия път s по следния начин:

$$N = \left[\frac{s + R}{2R} \right] \quad (3)$$

където знаците [] означават цяла част от число.

Изминатият път по оста х зависи от времето така:

$$s = v_0 t \quad (4)$$

Следователно

$$N = \left[\frac{v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}} + R}{2R} \right] [2 \text{ т}] = [18,5] = 18 \quad [1 \text{ т}]$$

г) от уравнения (2) и (4), изминатият път по оста х е $s = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$ [1 т] =

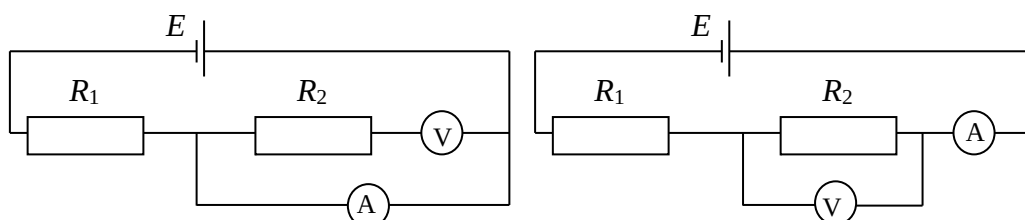
$9 \frac{\text{m}}{\text{s}} \sqrt{\frac{2 \cdot 80}{10}} \text{ s} = 36 \text{ m}$ [1 т]. Следователно топчето е изминало път, равен точно на

36 радиуса и ще падне точно в центъра на дъното, т.е. разстоянието между точката на падане на дъното на кладенеца и неговия център $x_1 = 0$ [1 т].

Задача 2. Разсеяният ученик.

а) Съпротивлението на амперметъра r_A може да се намери от първата схема (фиг.2а). Тъй като волтметърът има безкрайно голямо съпротивление, то токът през него е пренебрежимо малък. Следователно и пада на напрежение върху R_2 е пренебрежимо малък и волтметърът мери пада на напрежение върху амперметъра. Така

$$r_A = \frac{U_V}{I_A} [1 \text{ T}] = \frac{1V}{0,2A} = 5 \Omega [1 \text{ T}] \quad (5)$$



б) съпротивлението R_2 може да се намери от втората схема (фиг. 2б). От нея се вижда, че

$$R_2 = \frac{U_V'}{I_A'} [1 \text{ T}] = \frac{2,25V}{0,1A} = 22,5 \Omega [1 \text{ T}] \quad (6)$$

в) Написвайки закона на Ом за цялата верига последователно за двете схеми, се получава

$$E = I_A R_1 + I_A r_A \quad (7)$$

$$E = I_A' R_1 + I_A' R_2 + I_A' r_A \quad (8)$$

Изваждайки горните две равенства, се получава

$$0 = (I_A' - I_A)(R_1 + r_A) + I_A' R_2$$

(9) от горното равенство се намира R_1 :

$$R_1 = \frac{I_A' R_2}{I_A - I_A'} - r_A = \frac{I_A'}{I_A - I_A'} \frac{U_V'}{I_A'} - \frac{U_V}{I_A} = \frac{U_V'}{I_A - I_A'} - \frac{U_V}{I_A} [2 \text{ T}] = \quad (10)$$
$$= \frac{2,25V}{0,2A - 0,1A} - \frac{1V}{0,2A} = 22,5\Omega - 5\Omega = 17,5\Omega [1 \text{ T}]$$

г) електродвижещото напрежение E на батерията може да се намери от уравнения (7), (5) и (10):

$$E = I_A R_1 + I_A r_A = I_A \left(\frac{U_V'}{I_A - I_A'} - \frac{U_V}{I_A} \right) + I_A \frac{U_V}{I_A} = \frac{I_A U_V'}{I_A - I_A'} [2 \text{ T}] = \quad (11)$$
$$= \frac{0,2A \cdot 2,25V}{0,2A - 0,1A} = 4,5 \text{ V} [1 \text{ T}]$$

Задача 3. Позитроний.

а) Пълната механична енергия E на позитрония е равна на сумата на кинетичната $E_{\text{кин}}$ и потенциална $E_{\text{пот}}$ енергия на системата. Тъй като електронът и позитронът имат равни маси, центърът на масата на системата и разположен

на равни разстояния от тях. Следователно, електронът и позитронът обикалят по една и съща орбита с равни скорости. Кинетичната енергия на системата е

$$E_{кин} = 2 \frac{mv^2}{2} = mv^2 \quad [0.5 \text{ т}] \quad (12)$$

Потенциалната енергия на системата е

$$E_{ном} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} \quad [0.5 \text{ т}] \quad (13)$$

Скоростта на частиците v може да се намери от условието за движение по кръгова траектория:

$$\frac{mv^2}{r} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2r)^2} \quad [0.5 \text{ т}] \quad (14)$$

Така за кинетичната енергия получаваме

$$E_{кин} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 4r} \quad (15)$$

Пълната механична енергия ще е равна на

$$E = E_{кин} + E_{ном} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 4r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(2r)} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 4r} \quad [0.5 \text{ т}] \quad (16)$$

б) Моментът на импулса L на позитрония е равен на сумата на моментите на импулсите на електрона и позитрона. Тъй като те имат равни маси, скорости и обикалят по една и съща окръжност, то моментите на импулса им са равни. Следователно,

$$L = 2mvr \quad [1 \text{ т}] \quad (17)$$

Скоростта v може да се изрази от уравнение (14)

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m 4r}} \quad [0.5 \text{ т}] \quad (18)$$

Така за момента на импулса получаваме

$$L = e \sqrt{\frac{mr}{4\pi\epsilon_0}} \quad [0.5 \text{ т}] \quad (19)$$

в) Използвайки даденото условие за възможните стойности на момента на импулса,

$$L = n\hbar = e \sqrt{\frac{mr}{4\pi\epsilon_0}}, \text{ получаваме за възможните стойности на радиуса на}$$

кръговата орбита

$$r_n = \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{me^2} \quad [0.5 \text{ т}] \quad (20)$$

Замествайки в уравнение (16), получаваме

$$E_n = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 4r_n} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 4 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2 n^2}{me^2}} = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 4\hbar^2 n^2} \quad [1 \text{ т}] \quad (21)$$

При $n = 1$, за енергията на най-ниското енергетично ниво (“основното състояние”) се получава

$$E_1 = -\frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 4\hbar^2} = -\frac{me^4}{16\epsilon_0^2 \hbar^2} = 1,08 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 6,77 \text{ eV} \quad [\mathbf{0.5 \text{ т}}] \quad (22)$$

$$\text{г) скоростите на електрона и позитрона са равни: } v_e = v_p = v \quad (23)$$

Скоростта v при $n = 1$ може да се намери от уравнения (18) и (20):

$$v_1 = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m 4r_1}} = \frac{e}{\sqrt{4\pi\epsilon_0 m 4 \frac{4\pi\epsilon_0 \hbar^2}{me^2}}} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 \hbar 2} = \frac{e^2}{4\epsilon_0 \hbar} \quad [\mathbf{1 \text{ т}}] \quad (24)$$

$$= 1,09 \cdot 10^6 \text{ m/s} \quad [\mathbf{0.5 \text{ т}}].$$

Тъй като $v_1 \ll c$, движението е нерелативистко. $[\mathbf{0.5 \text{ т}}]$

д) Тъй като движението е нерелативистко, кинетичната енергия на частиците е много по-малка от енергията им на покой $E_0 = mc^2$. Тъй като потенциалната енергия на системата по порядък е колкото кинетичната, и тя е много по-малка от енергията им на покой. Следователно с точност няколко процента (колкото ни интересува) можем да приемем, че пълната енергия на системата е равна на енергията на покой на частиците. При тяхната аниhilация, тази енергия се превръща в енергията на два фотона. В система, свързана с центъра на масата на позитрония, импулсът му е нула. Следователно импулсите на двата фотона ще бъдат противоположни по посока и равни по големина. А фотони, които имат равни импулси, имат равни енергии. Така от закона за запазване на енергията получаваме

$$2mc^2 = 2E_\phi \quad (25)$$

$$E_\phi = mc^2 \quad [\mathbf{1 \text{ т}}] = 9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2 = 8,12 \cdot 10^{-14} \text{ J} = 0,51 \text{ MeV} \quad [\mathbf{1 \text{ т}}]$$