Национално пролетно състезание по физика
Велико Търново, 13 – 14 март 2004 г
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. а) Нека отместването на тялото в даден момент е $x(t)$, а на точката на окачване – $x_O(t)$, Тогава удължението на пружината в дадения момент е:

$\Delta l(t) = x_O(t) - x(t)$. [0,5 т]

От закона на Хук силата, която действа на тялото е:

$F_x = k\Delta l(t) = k\,x_O(t) - k\,x(t)$. [0,5 т]

От 2. принцип на Нютон:

(1.1) $ma_x(t) = -k\,x(t) + k\,x_O(t)$. [0,5 т]

При хармонично трептене:

(1.2) $a_x(t) = -\omega^2 x(t) = -4\pi^2\nu^2 x(t)$, [0,5 т]

където ν е честотата на принуденото трептене. Освен това:

(1.3) $k = 4\pi^2\nu_0^2 m$, [0,5 т]

където ν_0 е честотата на свободното трептене. От уравнения (1.1) – (1.3) намираме:

(1.4) $x(t) = \dfrac{\nu_0^2}{\nu_0^2 - \nu^2} x_O(t)$. [0,5 т]

Оттук следва, че максималното отклонение (амплитудата) на тялото е:

(1.5) $A = \dfrac{\nu_0^2}{\left|\nu_0^2 - \nu^2\right|} A_O$. [0,5 т]

б) От уравнение (1.4) следва, че когато $\nu < \nu_0$, знаменателят е положителен и:

$x(t) = A\sin(2\pi\nu t)$,

т.е. $\Delta\phi = 0$. [0,5 т]

Когато $\nu > \nu_0$, знаменателят в уравнение (1.4) е отрицателен и следователно:

$x(t) = -A\sin(2\pi\nu t) = A\sin(2\pi\nu t + \pi)$.

В този случай фазовото отместване между трептенията на тялото и на точката на окачване е $\Delta\phi = \pi$. [0,5 т]

в) Според уравнение (1.5) условието $A > 2A_0$ е еквивалентно на следните две неравенства:

$$\left|\begin{array}{l}\nu_0^2 > 2(\nu^2 - \nu_0^2)\\ \nu_0^2 > 2(\nu_0^2 - \nu^2)\end{array}\right. .$$ [1 т]

Оттук намираме:

$\nu_0/\sqrt{2} < \nu < \nu_0\sqrt{3/2}$

или 7,07 Hz < ν < 12,25 Hz. [0,5 т]

г) Записваме втория принцип на Нютон при като отчитаме силата на триене:

$ma_x(t) = -k\,x(t) + k\,x_O(t) - rV$. [0,5 т]

При принудено трептене с честота ν_0 е в сила съотношението:

$ma_x = -m(2\pi\nu_0)^2 x = -kx$, [0,5 т]

което ни помага да определим закона за скоростта:

$V(t) = \dfrac{kx_O(t)}{r} = \dfrac{m(2\pi\nu_0)^2 A_O \sin(2\pi\nu_0 t)}{r}$ [1 т]

От закона за скоростта намираме закона за движение:

$$x(t) = \int v(t)dt = -\frac{2\pi\nu_0 mA_O}{r}\cos(2\pi\nu_0 t) = \frac{2\pi\nu_0 mA_O}{r}\sin\left(2\pi\nu_0 t - \frac{\pi}{2}\right). \qquad [1 т]$$

Оттук следва, че при резонанс амплитудата на трептене на топчето е:

$$A = \frac{2\pi\nu_0 mA_O}{r} \approx 12{,}6 \text{ cm}, \qquad [0{,}5 т]$$

а фазовата разлика между трептенията на топчето и на точката на окачване:

$$\Delta\phi = \pi/2. \qquad [0{,}5 т]$$

Задача 2. а) За време t компресорът извършва работа:

$$A = Pt, \qquad [0{,}5 т]$$

а работното вещество отнема от камерата количество топлина:

$$Q_0 = \lambda m. \qquad [0{,}5 т]$$

Хладилникът отдава на околната среда количество топлина:

$$Q_1 = Q_0 + A = \lambda m + Pt. \qquad [0{,}5 т]$$

От условието за равенство на приведените топлини:

(2.1) $$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_0}{T_0} \qquad [1 т]$$

намираме:

$$t = \frac{\lambda m(T_1 - T_0)}{PT_0} \qquad [1 т]$$

или

$$t = \frac{3{,}3.10^5 \text{ J/kg} . 1 \text{ kg} . 20 \text{ K}}{80 \text{ W} . 273 \text{ K}} \approx 300 \text{ s} = 5 \text{ min} . \qquad [1 т]$$

б) От уравнение (2.1) намираме, че въздухът в стаята получава количество топлина:

(2.2) $$Q_1 = \frac{\lambda m T_1}{T_0}. \qquad [0{,}5 т]$$

Обемът на въздуха не се променя при неговото нагряване. Следователно:

(2.3) $$Q_1 = nC_V\Delta T. \qquad [1 т]$$

Броя молове определяме от уравнението на Клапейрон–Менделеев:

(2.4) $$n = \frac{p_0 V}{RT_1}. \qquad [1 т]$$

За идеален двуатомен газ:

(2.5) $$C_V = \frac{5}{2}R. \qquad [1 т]$$

От уравненията (2.2) – (2.5) намираме:

$$\Delta T = \frac{2\lambda m T_1^2}{5 p_a V T_0} \qquad [1 т]$$

или

$$\Delta T = \frac{2 . 3{,}3.10^5 \text{ J/kg} . 1 \text{ kg} . (293 \text{ K})^2}{5 . 1{,}0.10^5 \text{ Pa} . 100 \text{ m}^3 . 273 \text{ K}} \approx 4{,}2 \text{ K}. \qquad [1 т]$$

Задача 3. а) От условието на Бор следва, че:

$$2\pi r = n\frac{h}{p}. \qquad [1\ т]$$

При движение с релативистки скорости:

$$(1.1) \quad p = \frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad [1\ т]$$

откъдето следва:

$$\frac{mv}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{nh}{2\pi r}.$$

От условието $ma_n = F$ намираме:

$$(1.2) \quad \frac{mv^2}{r\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{k(Ze)e}{r^2} \qquad [0,5\ т]$$

От уравненията (1.1) и (1.2) получаваме:

$$(1.3) \quad \frac{v}{c} = \frac{2\pi kZe^2}{nhc}. \qquad [0,5\ т]$$

б) За водородния атом $Z = 1$. От уравнение (1.3) намираме при $n = 1$:

$$(1.4) \quad \alpha = \frac{v}{c} = \frac{2\pi ke^2}{hc} = 7{,}2969.10^{-3}. \qquad [1\ т]$$

в) Понеже $v/c < 1$ от уравнения (1.3) и (1.4) получаваме:

$$\frac{2\pi kZe^2}{nhc} = \frac{Z\alpha}{n} < 1. \qquad [0,5\ т]$$

За да съществува орбита с $n = 1$ е необходимо:

$$Z < \frac{1}{\alpha} = 137{,}04 \qquad [0,5\ т]$$

или $Z_{max} = 137$. [0,5 т]

г) Кинетичната енергия на електрона е:

E_k = (пълна релативистка енетгия) – (енргия в покой)

или $$E_k = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}} - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-(Z\alpha/n)^2}} - 1\right). \qquad [1\ т]$$

Потенциалната енергия на електрона е:

$$E_p = -\frac{kZe^2}{r} = -\frac{m_0c^2(Z\alpha/n)^2}{\sqrt{1-(Z\alpha/n)^2}}. \qquad [1\ т]$$

След алгебрични преобразования получаваме:

$$E = E_k + E_p = m_0c^2\left(\sqrt{1-(Z\alpha/n)^2} - 1\right). \qquad [1\ т]$$

д) Тъй като $Z_{max} \approx 1/\alpha$, при $n = 1$ имаме: $E \approx -m_0c^2$. [0,5 т]

За да може фотонът да избие електрон от атома е необходимо:

$$\frac{hc}{\lambda} \geq |E| \qquad [0,5\ т]$$

или $$\lambda_{min} = \frac{h}{m_0c} = 2{,}46.10^{-3}\ \text{nm}. \qquad [0,5\ т]$$