Национално пролетно състезание по физика
Ковачевци, 21 –23.03.2003 г.
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. а) Тъй като $v_0 = u$, трупчето е неподвижно спрямо лентата и продължава да се движи равномерно, без хлъзгане, докато $kx \le f_{max}$, където $f_{max} = \mu_s mg = 16$ N е максималната сила на триене при покой. (1т)

Хлъзгането започва при $x_1 = \dfrac{\mu_s mg}{k} = 0{,}4$ m. (1т)

Непосредствено след този момент скоростта на трупчето е $v = u$, а силата на триене, която му действа намалява до $f = \mu_k mg = 8$ N и е насочена надясно, в положителна посока на оста x. (1 т)

В момента на спиране $v = 0$ и $x = x_{max}$. От закона за изменение на енергията следва:

$$\frac{kx_{max}^2}{2} = \frac{kx_1^2}{2} + \frac{mu^2}{2} + f(x_{max} - x_1), \qquad (1\ т)$$

Като вземем предвид израза за x_1 получаваме следното квадратно уравнение:

$$kx_{max}^2 - 2fx_{max} - mu^2 + \frac{2f_{max}f - f_{max}^2}{k} = 0\,.$$

Максималното разтягане на пружината (крайното дясно положение на трупчето) се определя от по-големия корен на уравнението:

$$x_{max} = \frac{f + \sqrt{kmu^2 + (f_{max} - f)^2}}{k} \approx 0{,}43 \text{ m}. \qquad (2\ т)$$

б) Докато трае хлъзгането, уравнението на движение на трупчето има вида:

$$ma = -kx + f = -k\left(x - \frac{f}{k}\right). \qquad (1\ т)$$

Следователно трупчето извършва хармонично трептене около отместено равновесно положение:

$$x(t) = x_0 + A\cos\left(2\pi\frac{t}{T_0} + \delta_0\right), \qquad (1\ т)$$

където $x_0 = \dfrac{f}{k} = 0{,}20$ m е равновесното положение, $T_0 = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}} \approx 1{,}40$ s е периодът на едно пълно хармонично трептене и δ_0 е началната фаза.

Амплитудата на трептенето е:

$A = |x_{max} - x_0| = 0{,}23$ m. (1 т)

Хлъзгането се преустановява в момента, когато трупчето отново достигне скорост $v = u$. Това става в точка с координата x_2, симетрична на точката x_1 спрямо равновесното положение x_0:

$x_2 = 2x_0 - x_1 = 0$ m. (1 т)

Движението на трупчето от x_2 до x_1 е равномерно със скорост u. Времето за равномерно движение е:

$$t_{равн} = \frac{|x_2 - x_1|}{u} = 0{,}8 \text{ s}. \qquad (1\ т)$$

Времето за хармонично трептене е:

$t_{харм} = T_0/2 + 2\tau$, (0,5 т)

15

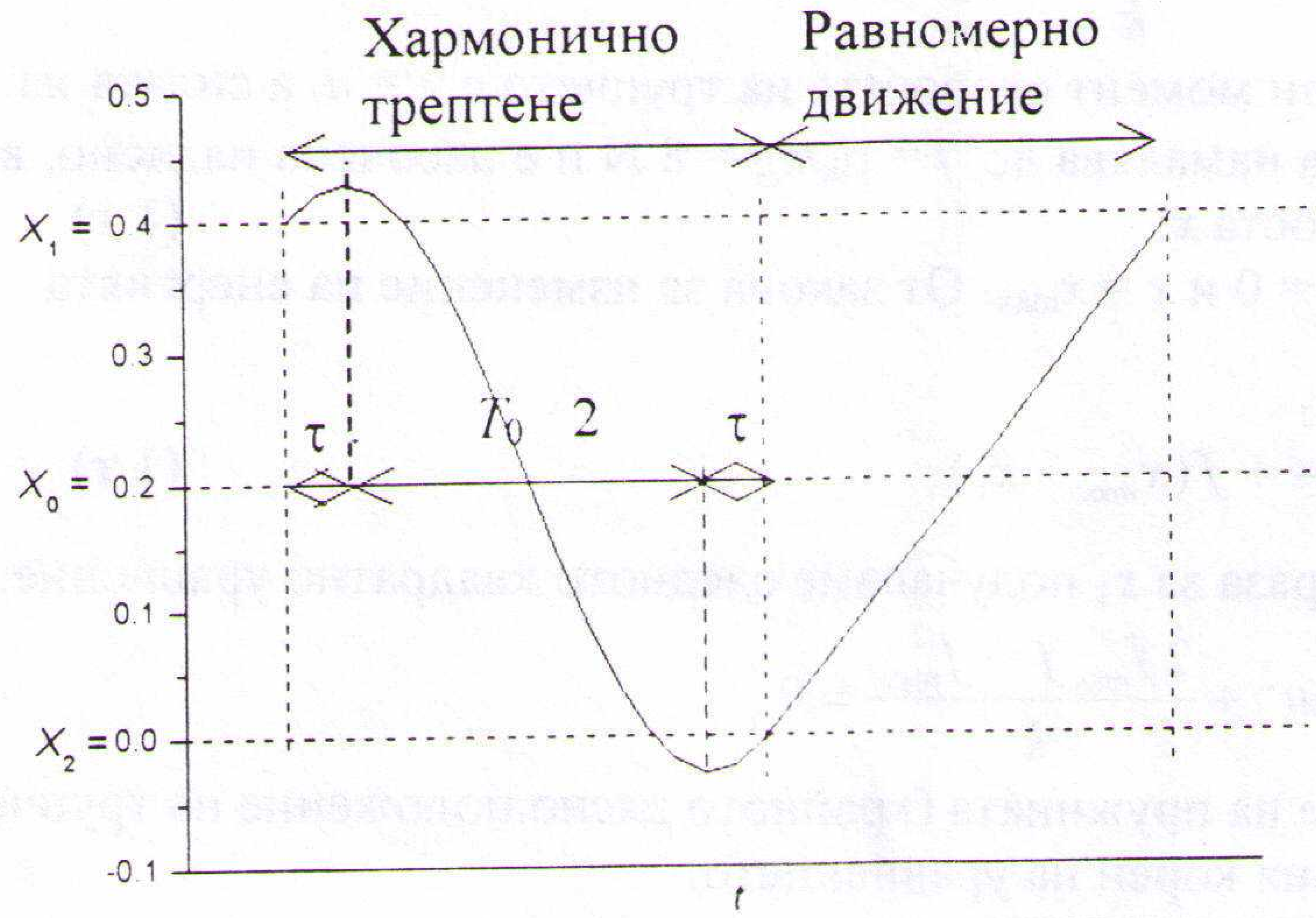
15

където τ удовлетворява уравнението $x_1 = x_0 + A\cos\left(2\pi\frac{\tau}{T_0}\right)$. Оттук намираме:

$$t_{\text{харм}} = \frac{T_0}{2} + \frac{T_0}{\pi}\arccos\left(\frac{x_1 - x_0}{A}\right) \approx 0{,}93 \text{ s}. \qquad (1 \text{ т})$$

Следователно периодът на сложното трептене е:

$$T = t_{\text{равн}} + t_{\text{харм}} \approx 1{,}73 \text{ s}. \qquad (0{,}5 \text{ т})$$



(2 т)

Задача 2. а) Разглеждаме проводник с дължина l и лице на напречното сечение S. При протичане на постоянен ток $\vec{f} - e\vec{E} = 0$, (1 т)

или:

$$v = \frac{eE}{\gamma} = \frac{eU}{\gamma l}. \qquad (1 \text{ т})$$

Токът по проводника е $I = nevS = \dfrac{ne^2}{\gamma}\dfrac{US}{l}$ (1 т)

От друга страна $U = \dfrac{\rho l}{S} I$. (1 т)

откъдето намираме:

$$\gamma = \rho n e^2 \qquad (1 \text{ т})$$

б) Масата на вещество с обем V е $m = dV$ и съдържа m/M мола. (1 т)

Броят на атомите в този обем, а оттам и броят на свободните електрони е

$$N = \frac{dVN_A}{M}, \qquad (1 \text{ т})$$

концентрацията на свободните носители:

$$n = \frac{N}{V} = \frac{dN_A}{M} \qquad (1 \text{ т})$$

и коефициентът γ:

$$\gamma = \frac{\rho d N_A e^2}{M} = 3{,}60.10^{-17} \text{ kg/s}. \qquad (1 \text{ т})$$

в) I метод – инерциална отправна система.

Електроните се ускоряват под действие на силата на триене, с която им действа кристалната решетка. От II принцип на Нютон:

14

$$m_e a = f = \gamma(v_+ - v_-),$$ (2 т)

където v_+ е скоростта на кристалната решетка, а v_- – скоростта на свободните електрони. Тъй като всеки атом в кристалната решетка е носител на един елементарен положителен заряд, движението на кристалната решетка поражда електричен ток:

$$I_+ = nev_+.$$ (1 т)

От друга страна електроните създават ток в обратна посока $I_- = nev_-$ (1 т)

Общият ток в проводника е:

$$I = I_+ - I_- = ne(v_+ - v_-)S = \frac{nem_e aS}{\gamma} = \frac{m_e a\pi r^2}{e\rho},$$ (1 т)

а магнитното поле върху повърхността:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 m_e ar}{2e\rho} = 4{,}25.10^{-10}\ \text{T}.$$ (1 т)

II метод – неинерциална отправна система, свързана с проводника

Върху всеки електрон е приложена инерчна сила $\vec{F}_{in} = -m_e\vec{a}$. (2 т)

Под действие на тази сила електроните се движат с постоянна скорост

$$\vec{v} = \frac{\vec{F}_{in}}{\gamma} = -\frac{m_e\vec{a}}{\gamma}.$$ (1 т)

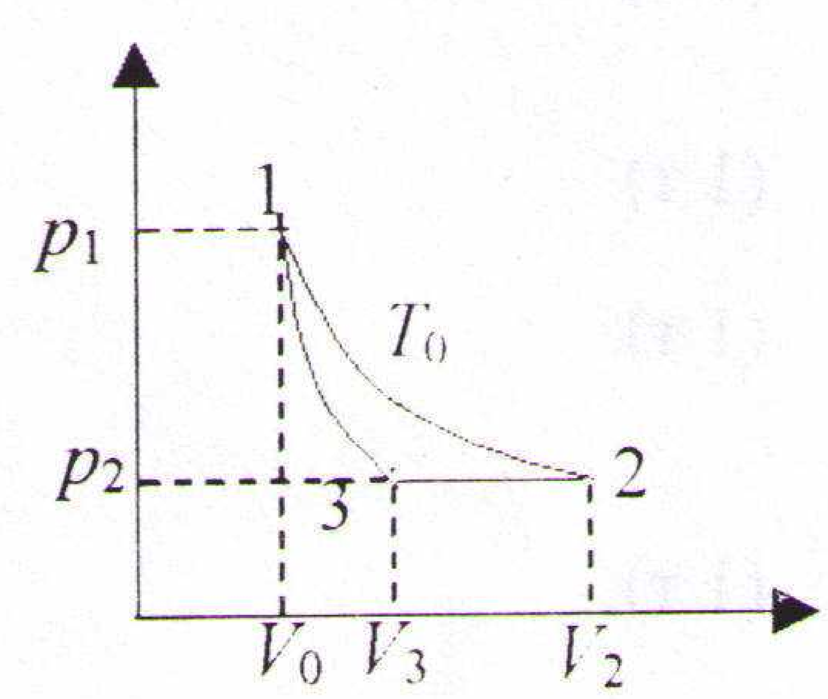
В тази отправна система атомите са неподвижни и само електроните създават ток:

$$I = nevS = \frac{nem_e a\pi r^2}{\gamma} = \frac{m_e a\pi r^2}{e\rho}.$$ (2 т)

Магнитното поле е:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 m_e ar}{2e\rho} = 4{,}25.10^{-10}\ \text{T}.$$ (1 т)

Задача 3. а) Графиката на цикличния процес е показана на фигурата (по 1 т за всеки правилно начертан процес).



б) Температурата на газа е минимална в състояние 3 (1 т). Процесът 1-2 е изотермен и $T_2 = T_0$. За изобарния процес 2-3:

$$\frac{V_2}{T_0} = \frac{V_3}{T_3}.$$ (1 т)

От друга страна процесът 3-1 е адиабатен и

$$T_3 V_3^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$$ (1 т)

От горните уравнения получаваме:

$$T_3 = T_0\left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}T_0$$

в) По определение:

$$\eta = 1 - \frac{Q_{\text{отд}}}{Q_{\text{пол}}}.$$

14

Работното вещество получава топлина само при изотермното разширение. Тъй като вътрешната енергия на идеалния газ зависи само от температурата му $U_1 = U_2$ и

$$Q_{\text{пол}} = U_2 - U_1 + A_{12} = RT_0 \ln 3 . \qquad (1 т)$$

Газът отдава топлина при изобарно свиване:

$$Q_{\text{отд}} = c_p (T_2 - T_3) = \frac{\gamma R T_0}{\gamma - 1}\left[1 - \frac{1}{3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}}\right], \qquad (1 т)$$

където е използвано съотношението на Майер $c_p = c_V + R$ и определението $\gamma = c_p / c_V$. Окончателно намираме:

$$\eta = 1 - \frac{\gamma\left[3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1\right]}{(\gamma - 1) 3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \ln 3} \approx 0{,}19 \qquad (2 т)$$

г) От всички топлинни двигатели работещи между максимална температура $T_{max} = T_0$ и минимална температура $T_{min} = 3^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} T_0$, максимален КПД има двигател, работещ по цикъла на Карно:

$$\eta_{max} = 1 - \frac{T_{min}}{T_{max}} = 1 - \frac{1}{3^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \approx 0{,}36 . \qquad (2 т)$$

<u>Задача 4</u>

а) Ще разглеждаме фотона като частица с енергия $h\nu$ и импулс $h\nu/c$ (1 т).
При излъчването на фотона източникът изпитва откат и неговата скорост се променя на u. От закона за запазване на енергията имаме:

$$\frac{1}{2} M \mathrm{v}^2 + E = \frac{1}{2} M u^2 + E' + h\nu \qquad (1 т)$$

Законът за запазване на импулса дава:

$$M\mathrm{v} = Mu \cos\varphi + \frac{h\nu}{c}\cos\theta \qquad (1 т)$$

$$0 = Mu \sin\varphi - \frac{h\nu}{c}\sin\theta \qquad (1 т)$$

Тъй като $E - E' = h\nu_0$ (1 т)
след като изключим u и φ получаваме:

$$2hM(\nu - \nu_0) - 2M\mathrm{v}\frac{h\nu}{c}\cos\theta + \left(\frac{h\nu}{c}\right)^2 = 0 \qquad (1 т)$$

Тъй като $M\mathrm{v} >> h\nu/c$, последното събираемо в лявата страна може да се пренебрегне и тогава получаваме:

$$\nu = \frac{\nu_0}{1 - \frac{\mathrm{v}}{c}\cos\theta} . \qquad (1 т)$$

б) При релативистки скорости:

$$E = \frac{Mc^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad \text{и} \quad p = \frac{M\mathrm{v}}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \qquad (1 т)$$

13

където $\beta = v/c$, а M – масата в покой на източника преди излъчване на фотона.
След излъчването масата в покой на източника намалява на M', така че

$$(M - M')c^2 = h\nu. \qquad (1\ т)$$

От законите за запазване на импулса и енергията имаме:

$$\frac{Mv}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M'u}{\sqrt{1-\beta'^2}}\cos\varphi + \frac{h\nu}{c}\cos\theta \qquad (1\ т)$$

$$0 = \frac{M'u}{\sqrt{1-\beta'^2}}\sin\varphi - \frac{h\nu}{c}\sin\theta \qquad (1\ т)$$

$$\frac{Mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{M'c^2}{\sqrt{1-\beta'^2}} + h\nu \qquad (1\ т)$$

От получената система уравнения и връзката между M и M' намираме:

$$\frac{Mc^2\nu}{\sqrt{1-\beta^2}}(1-\beta\cos\theta) = Mc^2\nu_0 - \frac{h\nu_0^2}{2} \qquad (1\ т)$$

След като пренебрегнем последното събираемо в дясната страна получаваме

$$\nu = \frac{\nu_0\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\theta} = \nu_0\frac{\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}}{1-\frac{v}{c}\cos\theta} \qquad (1\ т)$$

13