1ст

# РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ ТЕМАТА ПО ПРОГРАМАТА НА МОФ

Задача 1. а) За време $t$ през изходния отвор на тръбата ще преминат всички водни частици, които се намират на разстояние по-малко от $ut$ от отвора, т. е. в цилиндър с обем $V = uSt$ [1]. Следователно масата на водата, преминала за единица време през отвора, е:

$$\mu = \frac{m}{t} = \frac{\rho V}{t} = \rho u S\,. \text{ [1]}$$

б) Нека разгледаме движението на определено количество вода с маса $m$ през тръбата. В началото водата в езерото е неподвижна и следователно нейният импулс е нула. След излизане от тръбата водата се движи със скорост $u - v$ спрямо езерото и има импулс $p = m(u - v)$ [1], насочен хоризонтално в противоположна посока спрямо движението на катера. Съгласно със закона за изменение на пълния импулс на една система силата, с която тръбата действа върху водата, е:

$$F = \frac{p}{t} = \mu(u - v) = \rho u(u - v)S \text{ [2]}$$

и е насочена противоположно спрямо движението на катера. Съгласно с третия принцип на Нютон водата действа върху тръбата, а следователно и върху катера като цяло, със същата по големина сила, но насочена по-посока на движението – т. нар. реактивна сила. За да се движи катерът равномерно е необходимо реактивната сила да уравновесява силата на съпротивление:

$$\rho u(u - v)S = kv^2 \text{ или } u^2 - vu - \frac{k}{\rho S}v^2 = 0\,. \text{ [2]}$$

Полученото уравнение за $u$ има два корена – един положителен и един отрицателен. Отговорът на задачата се дава с положителния, корен:

$$u = \frac{v\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4k}{\rho S}}\right)}{2} = 2v = 20\,\text{m/s}. \text{ [2]}$$

в) Минималната мощност $P_{\min}$ на двигателя е равна на механичната работа, която двигателят извършва за единица време [1]. Тя се състои от две части:

- Работа, която извършва реактивната сила върху катера за единица време:
$$P_1 = Fv = \rho u(u - v)vS\,. \text{ [1]}$$
- Изменение на кинетичната енергия на изхвърляната вода за единица време:
$$P_2 = \frac{m(u - v)^2}{2t} = \frac{\rho u(u - v)^2 S}{2}\,. \text{ [2]}$$

Оттук намираме минималната мощност на двигателя:

$$P_{\min} = P_1 + P_2 = \frac{\rho u(u^2 - v^2)S}{2} = 30\,\text{kW}. \text{ [2]}$$

Задача 2. а) Температурата на газа е

$$T = \frac{PV}{R}, \text{ [1]}$$

2 сп

където $R$ е газовата константа. Максималната (минималната) температура съответства на максимално (минимално) произведение $PV$. От $PV$ диаграмата се вижда, че:

$$T_{\min} = T_1 = \frac{P_0V_0}{R} \ \ [1] \text{ и } T_{\max} = T_2 = \frac{4P_0V_0}{R} \ \ [1].$$

б) Механичната работа на двигателя за един цикъл съответства на площта, която загражда $PV$ диаграмата на кръговия процес:

$$A = \frac{(P_2 - P_1)(V_2 - V_1)}{2} = \frac{P_0V_0}{2}. \ [1]$$

Работното вещество поглъща топлина само по време на процеса 1 – 2:
$Q_{12} = \Delta U + A_{12}$, [2]
където $\Delta U = C_V(T_2 - T_1)$ [2] е изменението на вътрешната енергия на газа, а $A_{12} = \dfrac{(P_2 + P_1)(V_2 - V_1)}{2} = \dfrac{3P_0V_0}{2}$ [2] е механичната работа, която газът извършва.
Като отчетем, че за едноатомен газ моларният топлинен капацитет при постоянен обем е $C_V = 3/2\, R$ [1], намираме погълнатото количество топлина:

$$Q_{12} = 6P_0V_0 \quad [1].$$

Оттук определяме коефициента на полезно действие:

$$\eta = \frac{A}{Q_{12}} = \frac{1}{12} \quad [2].$$

в) За двигател на Карно, който работи при същите $T_{\min}$ и $T_{\max}$, получаваме:

$$\eta_{\text{Карно}} = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}} = \frac{3}{4} \quad [1].$$

<u>Коментар:</u> Фактът, че $\eta < \eta_{\text{Карно}}$ следва от т. нар. теорема на Карно, която гласи: "От всички циклични топлинни машини, които работят при еднакви минимални и еднакви максимални температури на работното вещество, най-голям КПД има двигател, който работи по цикъла на Карно."

<u>Задача 3.</u> а) Потокът на външното магнитно поле през контура, съставен от жичката, релсите и намотката, е $\Phi = Blx\cos\alpha$. При движение на жичката потокът се променя и това води до индуциране на електродвижещо напрежение с големина:

$$U_1^* = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = Bl\frac{\Delta x}{\Delta t}\cos\alpha = Blv\cos\alpha, \quad [1]$$

където $v$ е скоростта на жичката. Съгласно с правилото на Ленц посоката на тока, породен от индуцираното ЕДН, е такава, че магнитното поле $\vec{B}'$, което създава този ток компенсира нарастването на външния магнитен поток. От правилото на дясната ръка следва, че посоката на индуцирания ток $I$ през жичката е от т. $Q$ към т. $P$. [1]

В намотката поради самоиндукция възниква ЕДН:

$$U_2^* = -L\frac{\Delta I}{\Delta t}. \quad [1]$$

Знакът " – " означава, че $U_2^*$ има противоположна посока спрямо $U_1^*$. Тъй като веригата има нулево съпротивление, е изпълнено равенството $U_1^* + U_2^* = 0$.
Оттук следва, че:

$$L\frac{\Delta I}{\Delta t} = Bl\frac{\Delta x}{\Delta t}\cos\alpha \quad [1] \quad \text{или}$$

3 ст

$$I = \frac{Blx}{L}\cos\alpha\,.\ [1]$$

б) Пълната енергия на системата жичка + релси + намотка е съставена от три събираеми: $E = K + U + W$, където:

$K = \frac{mv^2}{2}$ е кинетичната енергия на жичката; [0,5]

$U = -mgh = -mgx\sin\alpha$ е потенциалната енергия на жичката. Знакът минус възниква, защото приемаме, че горният край на релсите е нулево ниво за отчитане на потенциалната енергиа; [0,5]

$W = \frac{LI^2}{2} = \frac{(Blx\cos\alpha)^2}{2L}$ е енергията на магнитното поле в намотката. [1]

Тъй като в началния момент $v = 0$ и $x = 0$, пълната енергия е нула. Поради липсата на триене пълната енергия на системата се запазва. В момента на максимално отклонение ($x = x_{max}$) скоростта на жичката е нула, т. е. $K = 0$. От закона за запазване на енергията следва, че:

$$\frac{(Blx_{max}\cos\alpha)^2}{2L} - mgx_{max}\sin\alpha = 0\,,\ [1]$$

откъдето намираме:

$$x_{max} = \frac{2mgL\sin\alpha}{(Bl\cos\alpha)^2} \approx 13\ \text{cm}.\ [1]$$

в) I метод

Записваме израза за пълната енергия на системата:

$$E = \frac{(Blx\cos\alpha)^2}{2L} + \frac{mv^2}{2} - mgx\sin\alpha\,.$$

От ЗЗЕ следва, че първата производна на енергията $E'(t)$ по времето е равна на нула:

$$E' = \frac{(Bl\cos\alpha)^2}{L}xx' + mvv' - mgx'\sin\alpha = 0\,.\ [1]$$

Като вземем предвид, че $v = x'$ и съкратим на скоростта, получаваме:

(1) $$ma = -\frac{(Bl\cos\alpha)^2}{L}x + mg\sin\alpha\,,\ [1]$$

където $a = v'$ е ускорението на жичката. Полученото уравнение описва хармонично трептене с кръгова честота:

$$\omega = \frac{Bl\cos\alpha}{\sqrt{mL}}\ \text{и период:}\ [1]$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi\sqrt{mL}}{Bl\cos\alpha} \approx 0{,}73\ \text{s}.\ [1]$$

II метод

На жичката действа в хоризонтална посока магнитната сила $F_m = IBl$, чиято проекция върху оста $x$ е $-IBl\cos\alpha$. Като отчетем, че проекцията на силата на тежестта върху оста $x$ е $mg\sin\alpha$, получаваме уравнението за хармонично трептене (1).

Равновесното положение $x_0$, спрямо което трепти жичката, се определя от условието $a = 0$. От уравнението за движение намираме:

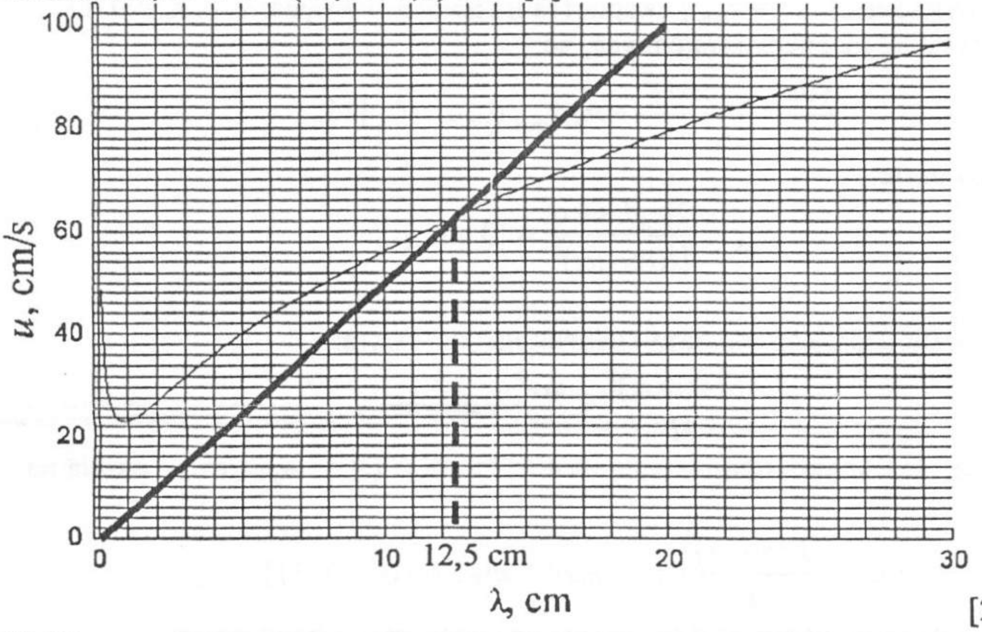
4.а

$$x_0 = \frac{mgL\sin\alpha}{(Bl\cos\alpha)^2} = \frac{x_{max}}{2}. \ [1]$$

Амплитудата е равна на максималното отклонение спрямо равновесното положение:

$$A = |x_{max} - x_0| = x_{max}/2 \approx 7{,}5 \text{ cm}. \ [1]$$

Задача 4. а) Връзката между скоростта, дължината и честотата на вълната се дава с уравнението $u = \nu\lambda$ [1]. При зададена честота $\nu = 5$ Hz допустимите стойности на $u$ в cm/s и на $\lambda$ в cm лежат върху права, която се задава с уравнението $u = 5\lambda$. Дължината на вълната се определя от пресечната точка на тази права с графиката на експерименталната зависимост $u = f(\lambda)$. Така определяме $\lambda \approx 12{,}5$ cm. Грешката е равна на 1/2 от разделителната способност на скалата, т. е. $\lambda = (12{,}5 \pm 0{,}5)$ cm [1].




[2]

б) Изразяваме размерностите на зададените величини чрез основните мерни единици:

$[u] = \text{m.s}^{-1}$; $[\lambda] = \text{m}$; $[\rho] = \text{kg.m}^{-3}$ и $[g] = \text{m.s}^{-2}$. [1]

След като заместим в уравнението $u = C\lambda^p\rho^q g^r$, получаваме:

$\text{m.s}^{-1} = \text{m}^{p-3q+r} . \text{kg}^q . \text{s}^{-2r}$. [1]

За да бъдат размерностите в двете страни на уравнението еднакви е необходимо степенните показатели на съответните основни единици да бъдат равни:

$p - 3q + r = 1$

$q = 0$ [1]

$2r = 1$.

Оттук определяме $p = ½$, $q = 0$, $r = ½$, т. е. търсената зависимост има следния вид:

(1) $$u = C\sqrt{\lambda g} \qquad [2].$$

в) I метод

Ако изберем нова независима променлива $x = \sqrt{\lambda}$, зависимостта на $u$ от $x$ се изобразява с права линия, минаваща през началото на координатната система:

$$u = kx. \ [1]$$

5

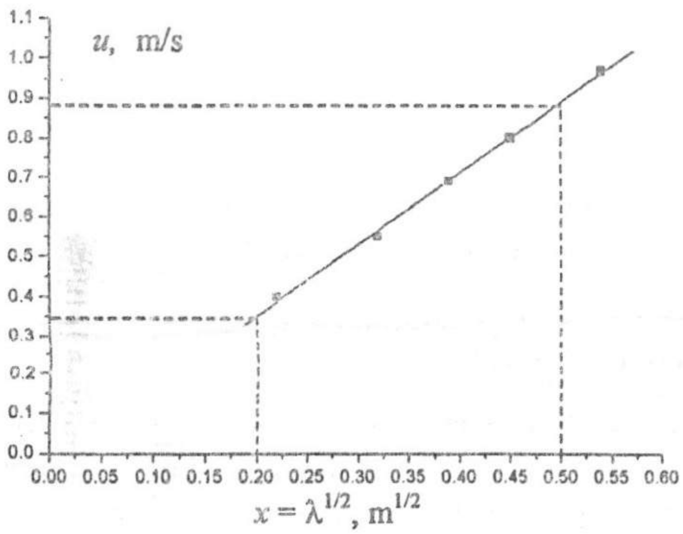
Неизвестната константа $C$ се определя от ъгловия коефициент $k$ на правата по формулата:

$$C = \frac{k}{\sqrt{g}}.$$

От графиката на фиг. 4 отчитаме поне 5 числени стойности за $\lambda$ и $u$ и ги нанасяме в таблца: [1]

| $\lambda$, m | $x = \sqrt{\lambda}$, $m^{1/2}$ | $u$, m/s |
|---|---|---|
| 0,05 | 0,22 | 0,4 |
| 0,10 | 0,32 | 0,55 |
| 0,15 | 0,39 | 0,69 |
| 0,20 | 0,45 | 0,80 |
| 0,25 | 0,5 | 0,89 |
| 0,30 | 0,54 | 0,97 |

Нанасяме върху милиметровата скала точките, които съответстват на $u$ и $x$:




[2]

Пресмятаме ъгловия коефициент като изберем две точки от построената права:

$$k = \frac{(0{,}88\ \text{m/s} - 0{,}35\ \text{m/s})}{(0{,}50\ \text{m}^{1/2} - 0{,}20\ \text{m}^{1/2})} \approx 1{,}8\ \text{m}^{1/2}\text{s}^{-1},\ [1]$$

откъдето намираме търсения коефициент $C$:

$$C = \frac{k}{\sqrt{g}} \approx 0{,}57.\ [1]$$

II Метод

От функционалната зависимост $u = C\sqrt{\lambda g}$, след като логаритмуваме, получаваме:

$$\lg u = \lg C + ½ \lg g + ½ \lg \lambda.$$

Следователно ако използваме като променливи $x = \lg \lambda$ и $y = \lg u$, зависимостта между $x$ и $y$ е линейна: $y = a + kx$ с ъглов коефициент $k = ½$ и свободен член $a$. Свобондния член определяме от $y$ – координатата на точката, в която графиката пресича ординатната ос. Константата $C$ се пресмята като:

$$C = 10^a / g^{1/2}.$$

При този метод на работа може да се използва произволна основа на логаритъма.