МИНИСТИРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
23.03.2001 – 25.03.2001 гр.Пловдив

РЕШЕНИЯ НА ЗАДАЧИТЕ ОТ СПЕЦИАЛНА ТЕМА

Решение на задача 1:

А/От уравнението на Бернули и уравнението за непрекъснатостта имаме:

6т. $$p_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} + \rho g y = p_0 + \frac{\rho v^2}{2}, \quad v_0 \pi x^2 = v\sigma, \qquad (g = 9{,}8\ \frac{m}{s^2}),$$

където p_0 е атмосферното налягане. Като решим тази система получаваме:

2т $$y = \frac{v_0^2}{2g}\left(\frac{\pi^2 x^4}{\sigma^2} - 1\right)$$

Б/

2т $$v = \sqrt{\frac{2gy}{1 - \frac{\sigma^2}{\pi^2 x^4}}} = v_0\sqrt{1 + \frac{2gy}{v_0^2}} \approx 2{,}4\ \frac{m}{s}$$

В/ Нека y е височината на течността в съда в произволен момент. Скоростта на течността, изтичаща от тръбата С в този момент до нивото на течността в съда е:

2т. $$v' = \sqrt{2g(H-y)}.$$

Количеството течност, което достига за време Δt до нивото на течността в съда е: $\rho v_1 S \Delta t$

3т *импулсът му е:* $\rho v_1 S \Delta t . v'$, а

1т *За единица време е предаден импулс:* $\rho v_1 S v'$

който е равен на големината на действащата сила F'.
Резултатната сила, действаща на дъното е :

4т $$F = \rho g y \pi x_0^2 + \rho v_1 S \sqrt{2g(H-y)}$$

където

3т $$x_0 = \sqrt{\frac{\sigma}{\pi}},$$

е абсцисата на една точка от повърхнината Ф с ордината y=0.
Следователно налягането е:

2т $$P = \rho g y + \frac{\rho v_1 S}{\sigma}\sqrt{2g(H-y)} \approx 7466{,}5\ Pa.$$

II. Нека в даден момент височината на течността в съда е y и отворът е отворен. Тогава, поради изтичането на течността, изменението на импулса на съда за единица време е:

6т. $$\frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = -\rho \sigma v \vec{v} = \vec{F}.$$

Силата $\vec{F}$ има посока на оста Оу, а големината й е :

5т. $$F = \rho\sigma v^2 = \rho\sigma v_0^2\left(1 + \frac{2gy}{v_0^2}\right) = 0{,}74\ N.$$

4т. *Следователно сила, която уравновесява блюдото при отворен отвор е по-малка от силата, която го уравновесява при затворен отвор, при условие, че височината на течността в съда и в двата случая е една и съща.*

Решение на задача 2:

А/ От дадените две формули получаваме:

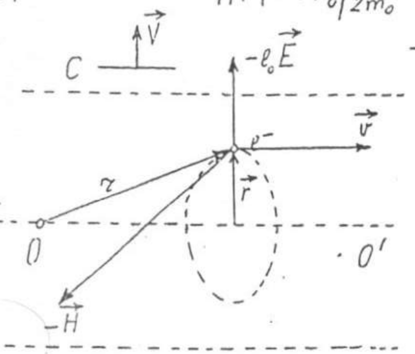
1т. $$k=\frac{n_0 e_0}{2\varepsilon_0}, \quad \vec{E}=-\frac{n_0 e_0}{2\varepsilon_0}\vec{r}.$$

Да си представим коаксиален цилиндър в снопа с радиус $r=|\vec{r}|$ *. От формулата за интензитет на магнитно поле на праволинеен ток, за интензитета на магнитното поле H в точка* r *получаваме:*

$$|\vec{H}|=\frac{J}{2\pi r}=\frac{\pi r^2 v e_0 n_0}{2\pi r}, \quad v=\sqrt{\frac{2e_0 U}{m_0}},$$

Така че

3т $$|\vec{H}|=r n_0\sqrt{\frac{e_0^3 U}{2m_0}}$$



/Виж фигурата, където:
– H е перпендикулярен вектор на равнината на листа, насочен към нас./
Тогава силата, действаща на един електрон от снопа е :

$$\vec{F}=-e_0\vec{E}-e_0\mu_0 v|\vec{H}|\frac{\vec{r}}{r}=\frac{e_0^2 n_0}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\vec{r}=$$

$$=\frac{e_0^2 n_0}{2\varepsilon_0}\left(1-\frac{2e_0 U}{m_0 c^2}\right)\vec{r}\approx 1{,}44.10^{-17}\vec{r}\,N.$$

4т *Б/ Електричната сила обуславя разширение, а магнитната сила свиване на снопа..*

В/ Магнитните индукционни линии са окръжности, перпендикулярни на оста OO'.
Вън от снопа:

5т $$|\vec{H}|=\frac{J}{2\pi r}=\frac{\pi R^2 v n_0 e_0}{2\pi r}=\frac{R^2 v n_0 e_0}{2r}.$$

Индуцираното ЕДН е максимално, когато посоката на $\vec{V}$ *е радиална. То е равно на работата на силата, с която магнитното поле действа на единичен положителен заряд при пренасянето му от единия край на проводника до другия:*

5т $$\mathcal{E}=\mu_0|\vec{H}|lV=\mu_0 l w_0 R^2 n_0\sqrt{\frac{e_0^3 U}{2m_0}}\approx 6{,}20.10^{-15}V.$$

4т *Г/ Отношението на средно-квадратичната скорост на йоните към* $\left(v_{\text{ср.к}}=\sqrt{\frac{3kT}{10^4 m}},\right.$ *скоростта на електроните е 1,085.10*$^{-4}$*. Следователно можем да считаме йоните неподвижни.*

Интензитетът на електричното поле на снопа не зависи от скоростта на частиците в него, така че силата, с която действат положителните йони на един електрон е:

5т $$\vec{F}_+=-e_0\vec{E}_+=-e_0\frac{2e_0 n_1}{2\varepsilon_0}\vec{r}=-\frac{n_1 e_0^2}{\varepsilon_0}\vec{r}.$$

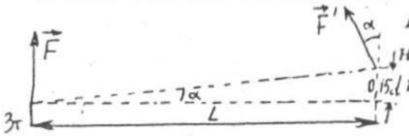
Снопът няма да се разширява, ако:

2т $$\vec{F}_+ + \vec{F}=0.$$

Т.е. ако:

$$n_1=\frac{n_0}{2}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)=\frac{n_0}{2}\left(1-\frac{2e_0 U}{m_0 c^2}\right)\approx 5.10^{9}\ m^{-3}.$$

II. Понеже $v \ll c$ *действието на магнитната сила може да не се отчита.*



Разширението на снопа е малко в сравнение с разстоянието L *, на което става това разширение. Следователно ъгълът*

$$\alpha\approx \operatorname{arctg}\frac{0{,}15d}{L}\ll 1.$$

и можем да считаме, че векторът $\vec{F}$ *остава постоянен. /виж фигурата/*

Силата, с която снопът действа на един електрон от снопа на повърхността му има големина

4т $$F=e_0 E=\frac{n_0 e_0^2 d}{2\varepsilon_0}$$

Ускорението, което тя му предава е:

1т $$a=\frac{n_0 e_0^2 d}{2\varepsilon_0 m_0}$$

Времето, за което ширината на снопа се увеличава с 30% е:

2т $$\tau=\sqrt{\frac{0{,}3d}{a}}=\sqrt{\frac{0{,}6\varepsilon_0 m_e}{n_0 e_0^2}}.$$

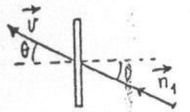
Разстоянието, на което става това разширение е:

1т $$L=v\tau=\sqrt{\frac{1{,}2\varepsilon_0 U}{n_0 e_0}}\approx 1{,}4\,m$$

Решение на задача 3:

I. Да положим: $x = \frac{h\nu}{\mu_0 c^2}$, ($x = 8,97.10^{-31}$).

А/ Когато се поглъща фотона енергията на покой на пластинката нараства.
Тогава от ЗЗИ и ЗЗЕ имаме:



$$\frac{h\nu}{c}\vec{n}_1 = \frac{\mu_0'\vec{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\mu_0'}{\mu_0}\frac{v}{c},$$

или /1/

6т $$h\nu + \mu_0 c^2 = \frac{\mu_0' c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad (x+1)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{\mu_0'}{\mu_0},$$

където $\vec{n}_1$ е единичният вектор на посоката на падащия фотон, $\vec{v}$ е скоростта на пластинката/ $v = |\vec{v}|$ /.
Като разделим уравненията / 1 / получаваме:

2т $$v = \frac{cx}{x+1},$$

след което намираме решението на системата / 1 /:

2т $$v = \frac{cx}{x+1} \approx \frac{h\nu}{\mu_0 c}, \quad \mu_0' = \mu_0\sqrt{1+2x} \approx \mu_0\left(1+\frac{h\nu}{\mu_0 c^2}\right).$$

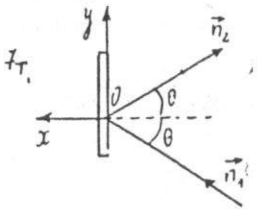
Б/ Частта от енергията на фотона, превърнала се в механична енергия на пластинката е:

3т $$\eta = \frac{1}{h\nu}\left(\frac{\mu_0' c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \mu_0' c^2\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{(x+1)^2}}} - 1\right) \approx \frac{x}{2}.$$

В/ При отражение на фотона от пластинката ЗЗИ и ЗЗЕ са:

/виж фигурата/

7т



$$\frac{h\nu}{c}\vec{n}_1 - \frac{h\nu'}{c}\vec{n}_2 = \frac{\mu_0 v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x\vec{n}_1 - x'\vec{n}_2 = \frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

или (2

$$h\nu + \mu_0 c^2 = h\nu' + \frac{\mu_0 c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \qquad x - x' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1,$$

където:
$x' = \frac{h\nu'}{\mu_0 c^2}$

Като повдигнем уравненията /2/ на квадрат получаваме системата:

7т $$x^2 + x'^2 + 2xx'\cos 2\theta = \frac{v^2/c^2}{1-v^2/c^2}, \qquad (3$$

$$x^2 + x'^2 - 2xx' = \frac{1}{1-v^2/c^2}\left(2-\frac{v^2}{c^2}-2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\right).$$

Като извадим уравненията на системата /3/ получаваме:

$$2xx'\cos^2\theta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} - 1 = x - x'. \qquad (4)$$

От /4/ намираме:

$$x' = \frac{x}{1+2x\cos^2\theta}$$

2т $$\nu' = \nu : \left(1+\frac{2h\nu}{\mu_0 c^2}\cos^2\theta\right) \approx \nu\left(1-\frac{2h\nu}{\mu_0 c^2}\cos^2\theta\right) = 6,1.10^{14}\left(1-5,09.10^{-31}\right) Hz.$$

Като заместим получения израз в първото равенство на /3/ получаваме:

2т $$v \approx 2\frac{h\nu}{\mu_0 c^2}\cos\theta \approx 1,8.10^{-30}\,\frac{m}{s}.$$

Относителната грешка, която се допуска, ако се приеме, че $\nu' = \nu$ е:

2т $$\eta = \frac{|\nu-\nu'|}{\nu} = 5,09.10^{-29}\,\%.$$

Г/ Да се пренебрегне движението на пластинката означава да не се отчита изменението на честотата на отразения фотон.

Нека $\Delta N(\nu)$ е броят фотони, които се намират в единица обем от снопа и имат честоти между ν и $\nu+\Delta\nu$, където $\Delta\nu$ е малък честотен интервал. От тях $R\Delta N(\nu)$ се отразяват и предават импулс

7т. $$\vec{P_1} = R\,\Delta N(\nu)\left(\frac{2h\nu}{c}\cos\theta,\ 0\right)$$

а $(1-R)\Delta N(\nu)$ се поглъщат, предавайки импулс

5т. $$\vec{P_2} = (1-R)\,\Delta N(\nu)\left(\frac{h\nu}{c}\cos\theta,\ \frac{h\nu}{c}\sin\theta\right).$$

Предаденият импулс ще получим като сумираме $\vec{P_1}$ и $\vec{P_2}$ по всички честоти.

Очевидно сумата от величините $h\nu\Delta N(\nu)$ е равна на u.

За предаденият импулс за единица време получаваме:

4т $$|\Delta\vec{P}| = \frac{uS}{c}\sqrt{(1+R)^2\cos^2\theta+(1-R)^2\sin^2\theta}\; c\cos\theta = uS\sqrt{1+R^2+2R\cos 2\theta}\,.\cos\theta = 6{,}53.10^{-12}\ \frac{kg.m}{s}.$$

Предаденият импулс за единица време върху единична площ, т.е. нормалното налягане е :

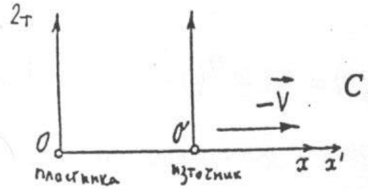
4т $$P = (1+R)\,u\cos^2\theta \approx 3{,}42.10^{-6}\ Pa. \qquad (5)$$

II. Спрямо отправна система, свързана с пластинката, източникът се движи със скорост $-\vec{V}$, значи със скорост с големина $V = |\vec{V}|$.

Плоска вълна спрямо K' е:

$$u' = A'\cos\left[2\pi\nu\left(t'+\frac{x'}{c}\right)+\delta'\right] \qquad (6)$$

2т



С помощта на трансформациите на Лоренц

$$x' = \frac{x-Vt}{\sqrt{1-V^2/c^2}},\quad t' = \frac{t-Vx/c^2}{\sqrt{1-V^2/c^2}}$$

От /6/ имаме:

$$u' = A'\cos\left[\nu\,\frac{1-V/c}{\sqrt{1-V^2/c^2}}\left(t+\frac{x}{c}\right)+\delta'\right]. \qquad (7)$$

Вълната /6/ в K е:

1т $$u = A\cos\left[2\pi\nu_0\left(t+\frac{x}{c}\right)+\delta\right].$$

И тя е същата като /7/.
Следователно:
Д/

2т. $$\nu_0 = \nu\,\frac{1-\frac{V}{c}}{\sqrt{1-\frac{V^2}{c^2}}} = \nu\sqrt{\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}} = 2{,}73.10^{14}\ Hz. \qquad 191$$

Е/ Предаденият импулс от отразен фотон е :

7т. $$|\Delta\vec{P}| = \frac{2h\nu_0}{c} = \frac{2h\nu}{c}\sqrt{\frac{1-\frac{V}{c}}{1+\frac{V}{c}}} = 1{,}2.10^{-27}\ kg.\frac{m}{s}.$$

Вместо да се извежда /9/ може да се използва формула от теорията на ефекта на Доплер.

Решение на задача 4:

А/ Както е известно E и M са постоянни и

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{R+h} = -|E|,\quad M = a(1-\varepsilon)vm,\quad \frac{v^2}{R+h} = \frac{\alpha}{m(R+h)^2}, \qquad /2/$$

където:

$$\alpha = \gamma m M_3$$

R *е радиусът на Земята*
h *е височината на спътника над Земята.*

В частния случай, когато траекторията е окръжност $a = R+h$ и $\varepsilon = 0$.

От /1/ за r *при* $\varphi = 0$ *получаваме:*

1т $$r = a(1-\varepsilon) = \frac{p}{1+\varepsilon},$$

а от първото и третото уравнения на /2/ получаваме:

4т $$a = \frac{p}{1-\varepsilon^2} = \frac{\alpha}{2|E|}. \qquad /3/$$

Записваме сега първите две уравнения на /2/ така:

1т. $$\frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{a(1-\varepsilon)} = -|E|,\quad M = a(1-\varepsilon)vm, \qquad /3'/$$

и изключваме v. *Получаваме квадратното уравнение:*

2т. $$(1-\varepsilon)^2 - 2(1-\varepsilon) + \frac{2|E|M^2}{m\alpha^2} = 0$$

Така намираме, че

4т $$\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{2|E|M^2}{m\alpha^2}}. \qquad /4/$$

Тогава от /3/ имаме:
2 $$p = \frac{M^2}{m\alpha}. \qquad /5/$$

Най-сетне от правоъгълния триъгълник $ОДF_1$ *имаме* ($F_1 Д = a$)

2т. $$b = \sqrt{a^2 - a^2\varepsilon^2} = a\sqrt{1-\varepsilon^2} = \frac{p}{\sqrt{1-\varepsilon^2}} = \frac{M}{\sqrt{2m|E|}}. \qquad /6/$$

От втория закон на Кеплер имаме, че площната скорост

2т $$\sigma = \frac{1}{2} r^2 \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{1}{2}\frac{M}{m} = const.$$

Тогава лицето на елипсата

2т. $$\pi a b = \frac{M}{2m} T, \quad и \quad T = \pi\alpha\sqrt{\frac{m}{2|E|^3}}.$$

Б/ Търсената скорост определяме от уравнението:

2т. $$\frac{v^2}{2} - \frac{\gamma M_3}{R} = 0.$$

Получаваме:

1т $$v = \sqrt{\frac{2\gamma M_3}{R}} = \sqrt{2}\sqrt{gR} = \sqrt{2}\, v_I.$$

В/ От /1/ при $\varphi = 0$ *и* $\varphi = \pi$ *получаваме:*

4т. $$r_{min} = a(1-\varepsilon) = R + h_1,\quad r_{max} = a(1+\varepsilon) = R + h_2,$$
$$2a = 2R + h_1 + h_2.$$

От /3'/ получаваме:

$$\frac{mv^2}{2} - \frac{\alpha}{R+h_1} = -E = -\frac{\alpha}{2a} = -\frac{\alpha}{2R+h_1+h_2},$$

6т. $$v = \sqrt{\frac{\alpha}{mR}}\sqrt{\frac{1+\frac{h_2}{R}}{\left(1+\frac{h_1+h_2}{2R}\right)\left(1+\frac{h_1}{R}\right)}},$$

6т. $$\frac{mv''^2}{R+h_1} = \frac{\alpha}{(R+h_1)^2},\quad v'' = \sqrt{\frac{\alpha}{mR} : \sqrt{1+\frac{h_1}{R}}}.$$

Откъдето следва, че

$$v'' = \sqrt{\frac{\alpha}{mR} : \sqrt{1+\frac{h_1}{R}}}.$$

(При работата на двигателя изменението на потенциалната енергия е пренебрежимо малко.)

Така намираме:

2т. $$\Delta v = v'' - v = \sqrt{\frac{\alpha}{mR\left(1+\frac{h_1}{R}\right)}}\left\{1-\sqrt{\frac{1+\frac{h_2}{R}}{1+\frac{h_1+h_2}{2R}}}\right\} = \sqrt{\frac{gR}{1+\frac{h_1}{R}}}\left\{1-\sqrt{\frac{1+\frac{h_2}{R}}{1+\frac{h_1+h_2}{2R}}}\right\} \approx -47{,}08\ \frac{m}{s}.$$

II. От ЗЗЕ:

4т $$v_\infty^2 = v^2 - 2v_I^2. \qquad /7/$$

Спрямо отправна система K_0, свързана със Слънцето от закона на Галилей следва формулата: /7/

6т $$\vec{u} = \vec{u}' + \vec{v}_\infty,$$

където $\vec{u}$ е скоростта на ракетата спрямо K_0.

Повдигаме /7/ на квадрат:

4т $$u^2 = u'^2 + v_\infty^2 + 2u'v_\infty\cos\theta. \qquad /8/$$

Като използваме Б/ можем да положим

2т $$u = \sqrt{2}\,u'.$$

Уравнението /8/ добива вида:

$$v_\infty^2 + 2u'v_\infty\cos\theta - u'^2 = 0.$$

Корен на това уравнение е:

5т $$v_\infty = u'\left(\sqrt{1+\cos^2\theta} - \cos\theta\right).$$

Като заместим последния израз в /7/ получаваме:

$$v_{III} = \sqrt{u'^2\left(\sqrt{1+\cos^2\theta} - \cos\theta\right)^2 + 2v_I^2}$$

При $\theta = 0$

$$v_{III} \approx 16{,}6\ \frac{km}{s},$$

а при $\theta = \pi$

$$v_{III} \approx 72{,}8\ \frac{km}{s}.$$