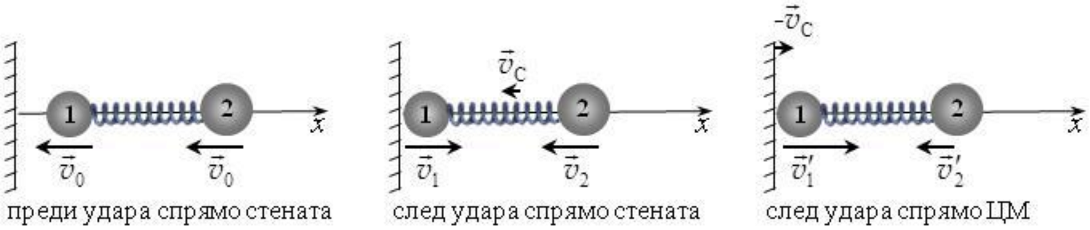
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Бургас, 08–10 ноември 2024 г.
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Трептяща гира



а) Избираме ос x по нормалата към стената с посока навън от стената, т.е. противоположно на началната скорост на гирата, както е показано на фигурата. Непосредствено след удара проекцията на скоростта на първата топка по x става $v_{1x} = v_0$, а на втората съответно $v_{2x} = -v_0$. Скоростта на центъра на масата (ЦМ) след удара е:

(1) $$v_C = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2} = -\frac{(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} v_0.$$ **[0.5 т]**

В отправната система на ЦМ, скоростите на двете топки след удара са:

(2) $$v'_{1x} = v_{1x} - v_C = \frac{2m_2}{m_2 + m_1} v_0; \;\; v'_{2x} = v_{2x} - v_C = -\frac{2m_1}{m_2 + m_1} v_0$$ **[1.0 т]**

а общата им кинетична енергия:

(3) $$E_к = \frac{m_1 v'^2_{1x}}{2} + \frac{m_2 v'^2_{2x}}{2} = \frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1} v_0^2$$ **[0.5 т]**

В момента на максимално свиване на пружината двете топки са неподвижни спрямо ЦМ и началната кинетична енергия се е трансформирала изцяло в потенциална енергия на пружината:

(4) $$\frac{2m_1 m_2}{m_2 + m_1} v_0^2 = \frac{k\Delta\ell^2}{2},$$ **[0.5 т]**

откъдето намираме:

(5) $$\Delta\ell = 2v_0 \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} = 0.04 \text{ m}.$$ **[1.0 т]**

б) В отправна система на ЦМ топките трептят хармонично в противофаза. Нека преместването на първата топка спрямо равновесното ѝ положение в даден момент е x_1. Понеже ЦМ е неподвижен, втората топка се е преместила в противоположна посока на разстояние:

(6) $$x_2 = -\frac{m_1 x_1}{m_2},$$

а деформацията на пружината е съответно:

(7) $$x = x_1 - x_2 = \frac{(m_1 + m_2)x_1}{m_2}.$$ **[0.5 т]**

От закона на Хук следва, че уравнението за движение на първата топка е:

(8) $$\ddot{x}_1 = -\frac{kx}{m} = -\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2} x_1,$$ **[0.5 т]**

което описва хармонично трептене с кръгова честота:

(9) $$\omega = \sqrt{\frac{k(m_1 + m_2)}{m_1 m_2}}$$ **[0.5 т]**

и период:

(10) $$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}}.$$ **[0.5 т]**

След удара пружината достига от недеформирано състояние до състояние с максимална деформация за четвърт период:

(11) $$t_1 = \frac{T}{4} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} \approx 0.105 \text{ s}.$$ **[1.0 т]**

в) След удара, в отправна система на ЦМ топката се движи по закона:

(12) $$x_1 = A \sin(\omega t)$$ **[0.5 т]**

с амплитуда:

(13) $$A = \frac{v'_{1x}}{\omega} = \frac{2 m_2 v_0}{\omega(m_1 + m_2)}.$$ **[0.5 т]**

В същата отправна система, след удара стената се движи спрямо ЦМ със скорост $-v_\text{C}$ и преместването ѝ се дава съответно със закона:

(14) $$x_\text{w} = \frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} v_0 t$$ **[0.5 т]**

Вторият удар настъпва в момента, в който координатите на топката и стената се изравнят:

(15) $$\frac{(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} v_0 t = \frac{2 m_2 v_0}{\omega(m_1 + m_2)} \sin(\omega t),$$

откъдето получаваме уравнението:

(16) $$\frac{(m_2 - m_1)}{2 m_2} \omega t = \sin(\omega t),$$ **[0.5 т]**

Удобно е уравнението да се решава спрямо фазата $\phi = \omega t$. Като вземем предвид числените стойности на двете маси, свеждаме уравнението до:

(17) $$f(\phi) = \frac{\phi}{4.00} - \sin\phi = 0.$$

Търсим решение на уравнението в интервала $[\pi/2\,;\pi]$. Левият край, където $f(\phi) < 0$, съответства на момента на максимална деформация, който очевидно е преди втория удар. В десния край $f(\phi) > 0$, което означава, че между двете стойности уравнението има корен. **[0.5 т]** Решаваме уравнението чрез последователно разполовяване на интервала, така че в левия край на всеки нов интервал функцията да е отрицателна, а в десния край – положителна. Деленето продължава, докато границите ϕ_1 и ϕ_2 на интервала съвпаднат в рамките на желаната точност, както е дадено в таблицата по-долу. **[0.5 т]**

ϕ_1 (rad)	ϕ_2 (rad)
1.570796	3.141593
2.356194	3.141593
2.356194	2.748894
2.356194	2.552544
2.454369	2.552544
2.454369	2.503457
2.454369	2.478913
2.466641	2.478913
2.472777	2.478913
2.472777	2.475845
2.474311	2.475845
2.474311	2.475078
2.474311	2.474695

Следователно можем да приемем, че решението на уравнението е приблизително $\phi \approx 2.47$ rad, а съответният момент на втория удар:

(18) $$t_2 = \frac{\phi}{\omega} = \phi\sqrt{\frac{m_1 m_2}{k(m_1 + m_2)}} \approx 0.16\ \text{s}.$$ **[0.5 т]**

Точките за числено решение – от формула (17) до края, се дават за всеки друг обоснован метод – графичен, Нютон–Рафсон, последователни приближения и т.н.

Задача 2. Електростатична призма

а) Разклеждаме мислена цилиндрична повърхност с радиус r, обхващаща жичката. Количеството заряд, заградено от повърхността, е:

(1) $$q = \gamma\ell,$$ **[0.5 т]**

където ℓ е височината на цилиндъра. Тъй като електричното поле е перпендикулярно на околната повърхност на цилиндъра и има постоянен по големина интензитет $E(r)$, потокът на полето през цилиндъра е:

(2) $$\Phi = E(r)\cdot 2\pi r\ell.$$ **[0.5 т]**

От теоремата на Гаус $\Phi = q/\varepsilon_0$, намираме:

(3) $$E(r) = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$ **[0.5 т]**

б) Понеже радиусът на жичките, е много по-малък от разстоянието между тях, може да приемем, че разпределението на заряда върху тяхната повърхност е практически равномерно. Следователно всяка жичка, създава поле, еквивалентно на полето на равномерно заредена линия. На разстояние r от оста на положително заредената жичка интензитетът на полето на жичката е:

(4) $$E^+(r) = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r}.$$

В областта между двете жички, отрицателно заредената жичка създава поле в същата посока като $E^+(r)$ с интензитет:

$$E^-(r) = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0(L-r)} \tag{5}$$

и резултатното поле е:

$$E(r) = E^+(r) + E^-(r) = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r} + \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0(L-r)} \tag{6}$$ **[0.5 т]**

Падът на потенциала, т.е. напрежението между две много близки точки е: $\mathrm{d}U \equiv -\mathrm{d}\varphi = \vec{E}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r}$. Следователно, напрежението между двете жички се дава с интеграла:

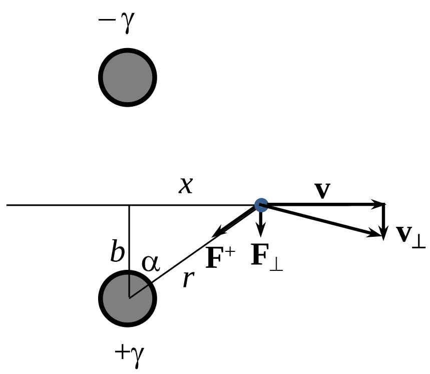
$$U = \int_a^{L-a} E(r)\mathrm{d}r = \frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0}\left(\int_a^{L-a}\frac{\mathrm{d}r}{r} + \int_a^{L-a}\frac{\mathrm{d}r}{L-r}\right) = 2\cdot\frac{\gamma}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{L-a}{a}\right). \tag{7}$$ **[1.0 т]**

Като пренебрегнем a спрямо L в числителя, намираме окончателно:

$$\gamma = \frac{\pi\varepsilon_0 U}{\ln(L/a)}. \tag{8}$$ **[0.5 т]**

в) От закона за запазване на енергията: $mv^2/2 = eV$, изразяваме скоростта на електрона на много голямо (безкрайно) разстояние от жичките:

$$v = \sqrt{\frac{2eV}{m}}. \tag{9}$$ **[0.5 т]**



Въвеждаме X в посоката на началната скорост на електроните и с начало в точката, където оста „пробожда” равнината между жичките, т.е. на разстояние b от положително заредената жичка. В нулево приближение електронът се движи с постоянна скорост v по оста X. Да разгледаме преместването на електрона от точка с координата x до точка с координата $x + \mathrm{d}x$. Времето за това преместване е:

$$\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}x}{v}. \tag{10}$$ **[0.5 т]**

В този интервал положително заредената жичка действа на електрона със сила:

$$F^+ = eE^+(r) = \frac{e\gamma}{2\pi\varepsilon_0 r}, \tag{11}$$

чиято проекция, перпендикулярно на траекторията, е:

$$F_\perp^+ = F^+\cos\alpha = \frac{F^+ b}{r} = \frac{e\gamma b}{2\pi\varepsilon_0(b^2+x^2)}. \tag{12}$$ **[0.5 т]**

За малкия интервал от време (10) тази сила има импулс в перпендикулярно направление:

$$\mathrm{d}J_\perp^+ = F_\perp^+\mathrm{d}t = \frac{e\gamma b\mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0 v(b^2+x^2)}, \tag{13}$$

а за цялото време на движение:

(14) $$J_\perp^+ = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e\gamma b \mathrm{d}x}{2\pi\varepsilon_0 v(b^2+x^2)} = \frac{e\gamma}{2\varepsilon_0 v}.$$ **[0.5 т]**

Вижда се, че импулсът на силата не зависи от разстоянието b, на което електронът се доближава до жичката. Следователно отрицателно заредената жичка действа със сила, която има същия по големина и посока импулс по време на движението:

(15) $$J_\perp^- = \frac{e\gamma}{2\varepsilon_0 v}.$$

Тогава общият импулс на електростатичните сили е:

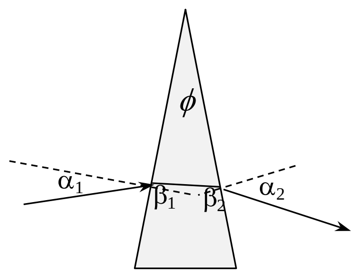
(16) $$J_\perp = J_\perp^+ + J_\perp^- = \frac{e\gamma}{\varepsilon_0 v}.$$ **[0.5 т]**

Съответно електронът придобива допълнителна скорост, перпендикулярно спрямо началната му скорост:

(17) $$v_\perp = \frac{J_\perp}{m} = \frac{e\gamma}{\varepsilon_0 m v}.$$ **[0.5 т]**

Ъгълът, на който се отклонява електронният сноп, е:

(18) $$\theta \approx \tan\theta = \frac{v_\perp}{v} = \frac{e\gamma}{\varepsilon_0 m v^2} = \frac{\pi U}{2V\ln(L/a)}.$$ **[0.5 т]**



г) На фигурата са дадени ъглите, които лъчът светлина сключва с нормалата към входната и към изходната повърхност на призмата. От закона на Снелиус:

(19) $$\sin\alpha_1 = n\sin\beta_1\,;\ \sin\alpha_2 = n\sin\beta_2.$$ **[0.4 т]**

Общият ъгъл на отклонение лъча е:

(20) $$\theta = (\alpha_1 - \beta_1) + (\alpha_2 - \beta_2).$$ **[0.6 т]**

Като вземем предвид, че ъглите са малки, т.е. $\sin x \approx x/\mathrm{rad}$, получаваме:

(21) $$\theta = (n-1)(\beta_1 + \beta_2)$$

От геометрични съображения е ясно, че:

(22) $$\beta_1 + \beta_2 = \phi.$$ **[0.5 т]**

Следователно:

(21) $$\theta = (n-1)\phi.$$ **[0.5 т]**

При дадените параметри за електростатичната призма намираме:

(22) $$\theta = \frac{3.14 \cdot 100\ \mathrm{V}}{2 \cdot 10\,000\ \mathrm{V} \cdot \ln(10\ \mathrm{mm}/0.1\ \mathrm{mm})} \approx 3.41 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{rad} = 0.195°.$$ **[0.5 т]**

Тогава за ъгъла при върха на оптичната призма получаваме:

(23) $$\phi = \frac{\theta}{n-1} = 0{,}390° = 23.4'.$$ **[0.5 т]**

Задача 3. Раждане на електрон-позитронна двойка

а) От закона за запазване на енергията следва, че:

(1) $$E_\gamma + Mc^2 = E,$$ **[1.0 т]**

където E е сумарната релативистична енергия на началната частица и възникналите след процеса електрон и позитрон. Сумарният импулс на трите частици след процеса е:

(2) $$P = P_\gamma,$$ **[1.0 т]**

където P_γ е импулсът на фотона преди процеса. Минималната енергия на падащия фотон съответства на случая, когато след процеса електронът, позитронът и началната частица се движат с еднаква скорост, т.е. като едно цяло тяло с маса в покой:

(3) $$M' = M + 2m_\mathrm{e}.$$ **[1.0 т]**

Вземаме предвид, че за фотона:

(4) $$E_\gamma = P_\gamma c,$$ **[1.0 т]**

а за трите частици след процеса:

(5) $$E^2 = P^2 + (M'c^2)^2.$$ **[1.0 т]**

След като повдигнем на квадрат двете страни на уравнение 1 и на уравнение 2, умножени с c^2, и ги съберем почленно, получаваме:

(6) $$E_\gamma^2 + M^2c^4 + 2E_\gamma Mc^2 + P^2c^2 = E^2 + P_\gamma^2 c^2.$$ **[1.0 т]**

Вземаме предвид тъждествата (4) и (5) и намираме окончателно:

(7) $$E_\gamma = \frac{(M+2m_\mathrm{e})^2c^2 - M^2c^2}{2M} = \frac{2(M+m_\mathrm{e})m_\mathrm{e}c^2}{M}.$$ **[1.0 т]**

б) В граничния случай на много тежко ядро, $M \gg m_\mathrm{e}$, т.е. при $M \to \infty$, намираме:

(8) $$E_\gamma = 2m_\mathrm{e}c^2 = 2 \times 9{,}11 \times 10^{-31}\mathrm{kg} \times (3{,}00 \times 10^8\ \mathrm{m/s})^2$$
$$= 1.64 \times 10^{-13}\mathrm{J}.$$ **[1.0 т]**

Като вземем предвид, че $1\ \mathrm{MeV} = 1{,}60 \times 10^{-13}\mathrm{J}$, намираме енергията на фотона в мегаелектронволти:

(9) $$E_\gamma \approx 1{,}02\ \mathrm{MeV}.$$ **[1.0 т]**

При взаимодействие с електрон, $M = m_\mathrm{e}$:

(10) $$E_\gamma = 6m_\mathrm{e}c^2 \approx 3{,}06\ \mathrm{MeV}.$$ **[1.0 т]**