МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
8 – 10 ноември 2024 г., Бургас
Решения на темата за VI състезателна група (12. клас)

Задача 1. Тяло и наклонена равнина

а) За да намерим ъгъла α, е удобно да работим в декартова координатна система с ос Ox надолу по посока на наклонената равнина и ос Oy нагоре, перпендикулярно на равнината. Като разложим земното ускорение по протежение на осите, се вижда, че движението по Ox е равноускорително с ускорение $a_x = g\sin\alpha$, а по Oy имаме равнозакъснително (и след това равноускорително) движение с ускорение $a_y = g\cos\alpha$. **[0,5 т.]** Началната скорост е само по посока на Oy. Ако вземем началото на координатната система да е в първоначалното положение на тялото, законите за движение по Ox и Oy придобиват следния вид: $x(t) = \frac{a_x t^2}{2} = \frac{g\sin\alpha t^2}{2}$ и $y(t) = v_0 t - \frac{a_y t^2}{2} = v_0 t - \frac{g\cos\alpha t^2}{2}$. **[1 т.]** Максимално отдалечаване от равнината ще има в точката от траекторията с максимално y, т.е. когато скоростта v_y по посока на оста Oy стане нулева: $v_y = v_0 - a_y t = v_0 - g\cos\alpha\, t = 0$. **[0,5 т.]** Оттук следва, че изминалото време до това положение на тялото е $t_{y\max} = \frac{v_0}{g\cos\alpha}$. **[0,5 т.]** Тъй като тази точка е на същата височина като началното положение на тялото върху равнината, може да се съобрази, че $\tan\alpha = \frac{y(t_{y\max})}{x(t_{y\max})} = \cot\alpha$. **[1 т.]** Така получаваме, че $\alpha = 45°$. **[0,5 т.]**

б) В момента на падане изминалото време от началото на движението ще означим с $t_{\text{пад}}$ и съответно $y(t_{\text{пад}}) = 0$, т.е. $t_{\text{пад}} = \frac{2v_0}{g\cos\alpha}$. **[0,5 т.]** Изпълнено е, че $x(t_{\text{пад}}) = \frac{2v_0^2\sin\alpha}{g\cos^2\alpha} = d$. **[0,5 т.]** Следователно $v_0 = \sqrt{\frac{gd}{2\sin\alpha}}\cos\alpha = \sqrt{\frac{gd}{2\sqrt{2}}} \approx 4{,}2\,\text{m/s}$. **[1 т.]**

в) Изминалото време до удара е $t_{\text{пад}} = \sqrt{\frac{2d}{g\sin\alpha}} = \sqrt{\frac{2\sqrt{2}d}{g}} \approx 1{,}2\,\text{s}$. **[1 т.]**

г) За да намерим най-високата точка от траекторията, ще използваме стандартната декартова координатна система (Ox е насочена хоризонтално надясно, а Oy е вертикално нагоре), центрирана в началното положение на тялото. Като отчетем, че ъгълът на хвърляне спрямо хоризонта е $\alpha = 45°$, законите за движение по осите са: $x(t) = v_0\sin\alpha\, t$ и $y(t) = v_0\cos\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$. **[1 т.]** В най-високата точка скоростта по Oy е нулева, така че $v_0\cos\alpha - gt = 0$, т.е. изминалото време е $t_{h\max} = \frac{v_0\cos\alpha}{g}$ и височината на търсената точка спрямо началното положение ще бъде $h_{\max} = \frac{v_0^2\cos^2\alpha}{2g} = \frac{d\cos^4\alpha}{4\sin\alpha}$. **[1 т.]** В условието се търси височината спрямо точката на падане, която се намира на $d\sin\alpha$ под началното положение на тялото, т.е. $H_{\max} = h_{\max} + d\sin\alpha = \frac{9d}{8\sqrt{2}} \approx 4\,\text{m}$. **[1 т.]**

Задача 2. Вертикални пружини (две независими части)

Част I В състояние на равновесие пружината е опъната и оказва сила $F = k\Delta\ell$ върху горното бутало надолу и върху долното бутало нагоре. **[0,5 т.]** Силата върху горното бутало създава допълнително налягане $F/S_{\text{г}}$ между буталата. **[0,5 т.]** Така на долното бутало има налягане $\rho g\ell + F/S_{\text{г}}$ над атмосферното, като с ℓ сме означили дължината на пружината. **[0,5 т.]** Сумарната сила върху долното бутало трябва да е нулева, т.е. $k\Delta\ell = S_{\text{д}}(\rho g\ell + F/S_{\text{г}}) = S_{\text{д}}(\rho g\ell_0 + \rho g\Delta\ell + k\Delta\ell/S_{\text{г}})$. **[0,5 т.]** Следователно, разтягането на пружината е $\Delta\ell = \frac{\rho g\ell_0 S_{\text{г}}S_{\text{д}}}{k(S_{\text{г}} - S_{\text{д}}) - \rho g S_{\text{г}}S_{\text{д}}} = \frac{\ell_0}{\frac{k}{\rho g}\left(\frac{1}{S_{\text{д}}} - \frac{1}{S_{\text{г}}}\right) - 1} \approx 6\,\text{cm}$. **[1 т.]**

Част II а) Законът за запазване на енергията (ЗЗЕ) преди удара дава, че $\frac{kd^2}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{kd^2}{8} + mgd/2$ (отчитаме гравитационната потенциална енергия спрямо началното положение на теглилката), където с v сме означили скоростта на теглилката в момента преди удара. **[1 т.]** При нееластичния удар се запазва сумарният импулс на двете тела, т.е. $mv = 3mv'/2$, където v' е скоростта на горния край на пружината след удара. **[1 т.]** Нека да използваме отново ЗЗЕ след удара: $\frac{3mv'^2}{4} + \frac{kd^2}{8} + \frac{3mgd}{4} = \frac{mv^2}{3} + \frac{kd^2}{8} + \frac{3mgd}{4} = \frac{3mgd}{2}$. **[1,5 т.]** От получените уравнения може да се пресметне търсеното $k = \frac{26mg}{9d} \approx 0{,}11\ \mathrm{kN/m}$. **[1,5 т.]**

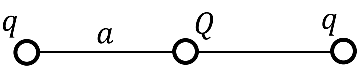
б) От условието се вижда, че горното крайно положение на махалото е при неразтегната пружина. За да намерим амплитудата, трябва да установим с колко ΔL е свита пружината в равновесно състояние. **[0,5 т.]** Тогава сумарната сила върху края на пружината се нулира, т.е. $k\Delta L = 3mg/2$. **[0,5 т.]** Амплитудата на трептене е $A = \Delta L = \frac{3mg}{2k} = \frac{27d}{52} = 2{,}7\ \mathrm{cm}$. **[1 т.]**

Задача 3. Заредени топчета

а) В началото системата е симетрична относно вертикалната медиана на триъгълника. Оттук може да се съобрази, че силите на опън на горните две нишки са равни на електростатичните сили между топчето със заряд Q и останалите две топчета: $T_{\text{г}} = \frac{kqQ}{a^2}$. **[1 т.]** Следователно, равновесието на долните две топчета е възможно, само ако $T_{\text{д}} = \frac{kq^2}{a^2}$. **[1 т.]**

б) Потенциалът в центъра на триъгълника е алгебрична сума на потенциалите на трите топчета в тази точка. **[0,5 т.]** Като използваме, че разстоянието от връх до медицентъра на равностранния триъгълник със страна a е $a/\sqrt{3}$, ще получим, че $\varphi_{\text{ц}} = \frac{\sqrt{3}k(2q+Q)}{a}$. **[1 т.]**

в) Електричната потенциална енергия може да се изрази като работата за приближаване на топчетата във върховете на равностранен триъгълник със страна a, ако първоначално топчетата са безкрайно далеч едно от друго и съответно имат нулева електрична потенциална енергия. **[0,5 т.]** За да приближим двете топчета със заряд q едно до друго, трябва да извършим работа A_{qq}, равна на тяхната електрична потенциална енергия: $A_{qq} = \frac{kq^2}{a}$. **[0,5 т.]** За да приближим третото топче до вече приближените топчета, трябва да извършим работа A_Q, която е равна на заряда Q, умножен по електричния потенциал в съответния връх: $A_Q = \frac{2kqQ}{a}$. **[0,5 т.]** Така получаваме, че $W = A_{qq} + A_Q = \frac{kq(2Q+q)}{a}$. **[0,5 т.]**



г) Електричната потенциална енергия в момента, когато топчетата са подредени на една линия (вж. фигурата вляво), се получава по аналогичен начин на предното подусловие. Първо приближаваме двете топчета със заряд q на разстояние $2a$ едно от друго, при което извършваме работа $A'_{qq} = \frac{kq^2}{2a}$. **[0,5 т.]** След това преместваме третото топче по средата между останалите две, за което работата A_Q е същата като в предното подусловие. **[0,5 т.]** Новата потенциална енергия е $W' = A'_{qq} + A_Q = \frac{kq(4Q+q)}{2a}$. **[0,5 т.]**

д) Системата от три свързани топчета е затворена, което означава, че сумарният импулс на системата се запазва (т.е. е винаги нулев) и нейният център на масата е неподвижен. **[0,5 т.]** Симетрията на задачата води до вертикално движение на топчето със заряд Q. **[0,5 т.]** В момента, когато топчетата са на една линия, топчето със заряд Q е в центъра на масата със скорост v_Q. Тогава другите две топчета се движат също вертикално (нишките са опънати) в обратна посока с наполовина по-малка скорост, за да е нула сумарният импулс. **[0,5 т.]** Нека да използваме и закона за запазване на енергията: $W = \frac{mv_Q^2}{2} + 2\frac{m}{2}\left(\frac{v_Q}{2}\right)^2 + W'$. **[0,5 т.]** Оттук и от предишните подусловия получаваме, че $v_Q = q\sqrt{\frac{2k}{3ma}}$. **[1 т.]**