Министерство на образованието и науката
Национално есенно състезание по физика,
8-10 ноември 2024 г., Бургас
Тема за 11.клас (V състезателна група)
Решения и указания за оценяване

Задача 1. Вълни на Дьо Бройл

Част А. а) По определение дължината на вълната на Дьо Бройл е

$$\lambda = \frac{h}{m\upsilon}, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

където υ е скоростта на частицата. При ускоряване от състояние на покой имаме

$$\frac{1}{2}m\upsilon^2 = W_1 - W_2 = -q_0(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

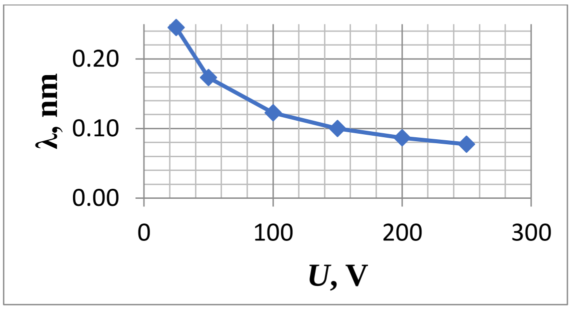
Тъй като електронът се движи по посока, обратна на посоката на силовата линия, а потенциалът намалява по посока на силовата линия, имаме $\varphi_2 > \varphi_1$, т.е. $\varphi_2 - \varphi_1 = U$. **[0,5 т.]** Ето защо

$$m\upsilon = \sqrt{2mq_0U}, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

при което намираме

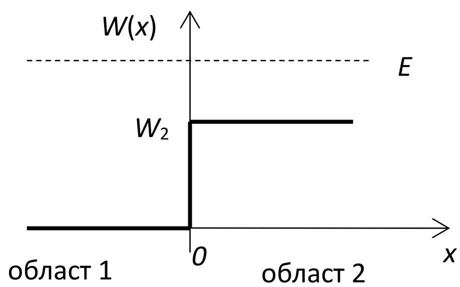
$$\lambda = \frac{h}{\sqrt{2mq_0U}} \approx \sqrt{\frac{150}{U}} \times 10^{-9}\ \text{m} = \sqrt{\frac{150}{U}}\ \text{nm}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

б) На фиг. 1 е показана графиката на $\lambda(U)$ за указания интервал от стойности на напрежения. **[1 т.]**



Фиг. 1

Част Б. а) На фиг. 2 е показана графиката на потенциалната енергия и енергията на движение на електрона. **[1 т.]**



Фиг.2

б) В областта 1 енергията на частицата е само кинетична, т.е. имаме

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon_1^2, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

откъдето намираме

$$m\upsilon_1 = \sqrt{2mE}\,. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Следователно имаме

$$\lambda_1 = \frac{h}{\sqrt{2mE}}\,. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

В областта 2 е в сила равенството

$$E = \frac{1}{2}m\upsilon_2^2 + W_2\,. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Тогава имаме

$$m\upsilon_2 = \sqrt{2m(E - W_2)}\,, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

което задава

$$\lambda_2 = \frac{h}{\sqrt{2m(E - W_2)}}\,. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Относителният показател на пречупване $n = n_2/n_1$ се определя с формулата

$$\lambda_2 = \left\{\left[\frac{h}{\sqrt{2m(E - W_2)}}\right] \times \frac{\sqrt{2mE}}{h}\right\} \times \lambda_1 \to \lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{1 - W_2/E}}\lambda_1 = \frac{\lambda_1}{n}\,.\textbf{[1 т.]}$$

Така намираме

$$n = \sqrt{1 - W_2/E} \approx 0,63\,. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Задача 2. Трептене

Част А. В началното си положение металното топче няма индуциран заряд.**[0,5 т.]** При отклонение наляво върху лявата му половина се индуцира отрицателен заряд, а върху дясната – положителен. **[0,5 т.]** Привлича се от пластината с положителен заряд, **[0,5 т.]** прилепва към нея, като придобива положителен заряд **[0,5 т.]** и се отблъсква. **[0,5 т.]** Като достигне отрицателно заредената пластина, зарядът на топчето се неутрализира, **[0,5 т.]** то придобива отрицателен заряд и се отблъсква от нея. **[0,5 т.]** Така махалото ще трепти между пластините, като ще пренася заряд. **[0,5 т.]** Пластините постепеннно ще се разреждат **[0,5 т.]**, а трептенията на махалото ще продължат до пълното им разреждане. **[0,5 т.]**

Част Б. а) Казваме, че една величина е много по-малка от друга, ако тя е поне десет пъти по-малка. Така $x_0/l \ll 1$, ако $x_0 \le 0{,}1l$.**[0,5 т.]** Това означава, че търсеното разстояние трябва да е в интервала

$$0 < x_0 \le 5\,\mathrm{mm}\,. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

б) При достигнато разстояние x_0 (фиг. 3) се уравновесяват електричната сила

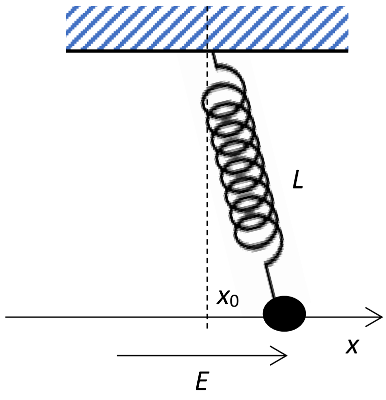
$$F_e = qE \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

и еластичната сила

$$F = k(L - l)\,, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

където $L = \sqrt{l^2 + x_0^2}$ **[0,25 т.]** е дължината на разтегнатата пружина. Компонентата на еластичната сила по спицата е

$$F_x = k(L - l)\sin\alpha = k(L - l)\frac{x_0}{L} = k\left(1 - \frac{l}{L}\right)x_0\,. \qquad \textbf{[1 т.]}$$



Фиг. 3

От условието на равновесие $F_x = F_e$,**[0,25 т.]** след като използваме приближението за „малки“ x_0, имаме

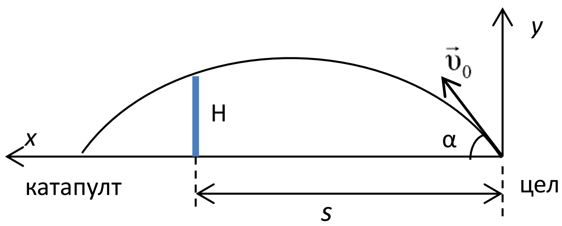
$$\frac{l}{L} = \frac{1}{\sqrt{1+(x_0/l)^2}} \approx 1 - \frac{x_0^2}{2l^2}, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

$$x_0 = \left(\frac{2ql^2E}{k}\right)^{1/3} \approx 3{,}7\ \text{mm}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Полученият резултат е в съответствие с направеното приближение.

Задача 3. Стрелба под обсада

а) Тъй като в крайната точка скоростта на гюлето по големина има същата



Фиг. 4

стойност както при изстрелването му, можем да използваме обратимостта на движението и да разгледаме движение на гюлето, при което то е изстреляно от целта и се движи към крепостта като минава непосредствено над стената (фиг. 4). **[1 т.]** Уравненията на движение на гюлето по хоризонталната и вертикалната ос са

$$x(t) = \upsilon_{0x}t = (\upsilon_0\cos\alpha)t, \textbf{[1 т.]} \qquad y(t) = \upsilon_{0y}t + \frac{a_y t^2}{2} = (\upsilon_0 \sin\alpha)t - \frac{gt^2}{2}. \textbf{[1 т.]}$$

Като изключим t, получаваме уравнението на траекторията на гюлето

$$y = x\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2\upsilon_0^2\cos^2\alpha}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Когато положим $x = s$, разстоянието между целта и крепостната стена, $y = H$ и използваме формулата от условието, получаваме

$$H = s\,\mathrm{tg}\alpha - \frac{gs^2}{2\upsilon_0^2}(1+\mathrm{tg}^2\alpha). \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Последното равенство може да се разглежда като квадратно уравнение за $\mathrm{tg}\alpha$ при зададени стойности на H и s.

$$\mathrm{tg}^2\alpha - 2\frac{\upsilon_0^2}{gs}\mathrm{tg}\alpha + \left(1 + \frac{2\upsilon_0^2 H}{gs^2}\right) = 0 .$$ **[1 т.]**

Това уравнение има решение, когато дискриминантата му е неотрицателна, т.е.

$$D = \left(\frac{\upsilon_0^2}{gs}\right)^2 - \left(1 + \frac{2\upsilon_0^2 H}{gs^2}\right) \geq 0 ,$$ **[0,5 т.]**

при което получаваме неравенството

$$s \leq \frac{\upsilon_0^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gH}{\upsilon_0^2}} .$$ **[0,5 т.]**

Следователно намираме

$$s_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{g}\sqrt{1 - \frac{2gH}{\upsilon_0^2}} \approx 38{,}9\ \mathrm{m} .$$ **[1 т.]**

б) Максималната дължина $L_{\max}$ на полета на гюлето съответства на ъгъл на изстрелване $\alpha = 45°$, което е еквивалентно на $H = 0$. **[1 т.]** В заключение намираме

$$L_{\max} = \frac{\upsilon_0^2}{g} \approx 63{,}8\ \mathrm{m} .$$ **[1 т.]**