МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЕСЕННО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
08–10 ноември 2024 г. – гр. Бургас
Тема за X клас (четвърта състезателна група)
Примерни решения и указания

Решение 1.1. Периодът на математичното махало зависи от дължината му L като $T = 2\pi\sqrt{L/g}$, където $g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$ е земното ускорение. В случая при развиване на една навивка дължината на нишката нараства с обиколката на цилиндъра $2\pi R$, така след развиване на n-та навивка периодът е:

$$T(n) = 2\pi\sqrt{\frac{L_0 + 2\pi Rn}{g}}.\ \textbf{(1 т.)}$$

От последното равенство се вижда, че може да направим следната линейна функция:

$$\frac{gT^2}{4\pi^2} = L_0 + 2\pi Rn,\ \textbf{(1 т.)}$$

където n е независимата променлива, а $y = gT^2/(4\pi^2)$ зависимата.

n	T, s	y, m
5	2.52	1.58
6	2.65	1.74
7	2.77	1.90
8	2.83	1.99
9	2.95	2.16
10	3.00	2.23
11	3.07	2.34
12	3.19	2.53
13	3.26	2.64
14	3.33	2.75

Решение 1.2. Пресмятаме стойностите за новата променлива y и ги записваме в таблицата. **(2 т.)** Чертаем зависимостта $y(n)$, след което прекарваме права през точките от графиката. **(4 т.)** Избираме две максимално отдалечени точки (т. A и т. B) от правата линия, чиито координати могат да се определят лесно, например за $n = 5$ и 14. От графиката се вижда, че y-координатите на т. A и т. B са съответно 1.61 и 2.76. Наклонът на правата може да се определи от:

$$2\pi R = \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x}, \text{така получаваме } R = \frac{B_y - A_y}{2\pi(B_x - A_x)} = \frac{2.76 - 1.61}{2\pi(14 - 5)}\mathrm{m} = 0.02\,\mathrm{m}.\ \textbf{(1 т.)}$$

Свободният член се определя от:

$$L_0 = \frac{B_xA_y - A_xB_y}{B_x - A_x} = \frac{14 \times 1.61 - 5 \times 2.76}{14 - 5}\mathrm{m} = 0.97\,\mathrm{m}.\ \textbf{(1 т.)}$$

Забележка: Ако стойностите за L_0 и R са верни ($L_0 \in [0.94, 1.00]$m и $R = 0.02\,$m), но не са определени от графиката се дават половината точки, но само ако е описано как са получени (например с функцията на калкулатора за пресмятане на линейна регресия). Ако не е описано как са получени, не се дават точки.

Решение 2.1. По условие знаем, че всяко заредено тяло може да се разгледа като съвкупност от достатъчно голям брой точкови заряди или може да запишем, че общият заряд на пръстена е $Q = \sum_i q_i$, където q_i е големината на всеки от тези заряди. **(1 т.)** Силата на взаимодействие между точковите заряди q_0 и q_i се пресмята от закона на Кулон:

$$\vec{F}_i = \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\frac{\vec{r}}{r}.\ \textbf{(1 т.)}$$

В случая това е сила на отблъскване и е насочена по линията свързваща двата заряда. Разстоянието r, може да се пресметне като използваме, че q_0 се намира на разстояние x по оста на пръстена, който има радиус R. От Питагоровата теорема следва, че: $r^2 = R^2 + x^2$. Като използваме симетрията на пръстена и това, че може да го разделим на голям брой точкови заряди, за всеки заряд q_i може да намерим диаметрално противоположен, който ще действа на q_0 със същата по големина сила. x-компонентите на тези две сили са равни по големина и еднопосочни, докато y-компонентите са в противоположна посока и сумата им е нула. **(1 т.)** Така получаваме, че принос към общата сила ще имат само x-компонентите на F_i:

$$F_{i,x} = \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{r^3} = \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(R^2 + x^2)^{3/2}}.\ \textbf{(1 т.)}$$

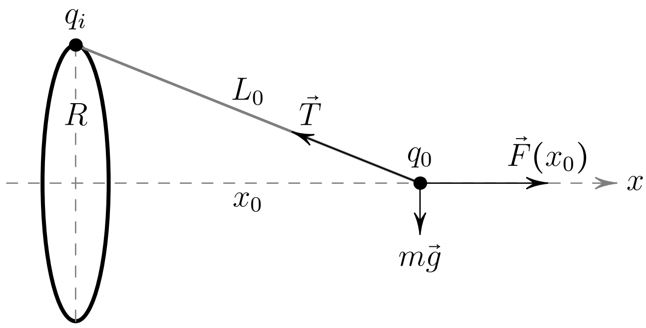
Сумираме по всички заряди от пръстена и получаваме резултантната сила, действаща на точковия заряд q_0:

$$F(x) = \sum_i \frac{q_0 q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{q_0 \sum q_i}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}} = \frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}. \ \textbf{(1 т.)}$$

Решение 2.2. Интензитета на електричното поле може да се получи от силата действаща на точковия заряд q_0. Като използваме определението за интензитет $E = F/q_0$, получаваме:

$$E(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(R^2+x^2)^{3/2}}, \textbf{(1 т.)} \text{ за } x \gg R \text{ получаваме } E(x) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 x^2}. \ \textbf{(1 т.)}$$

Решение 2.3. Когато зарядът q_0 е закрепен за непроводяща нишка хваната към горния край на пръстена, ще му действат три сили: сила на тежестта mg, сила на опън на нишката T и електростатичната сила $F(x)$. Нека при $x = x_0$ тези три сили се уравновесяват, т.е. $\vec{T} + m\vec{g} + \vec{F}(x_0) = \vec{0}$, което е еквивалентно на $\dfrac{F(x_0)}{mg} = \dfrac{x_0}{R}$, **(1.5 т.)** заместваме $F(x_0)$ и получаваме:



$$\frac{q_0 Q}{4\pi\varepsilon_0 mg} \frac{x_0}{(R^2+x_0^2)^{3/2}} = \frac{x_0}{R},$$

където $R^2 + x_0^2 = L_0^2$ или така дължината на нишката при която зарядът ще е в равновесие на оста на пръстена е:

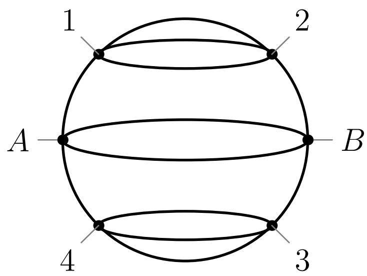
$$L_0 = \left(\frac{q_0 Q R}{4\pi\varepsilon_0 mg}\right)^{1/3}. \ \textbf{(1 т.)}$$

Друго възможно решение е при $x = 0$, тогава силата на опън на нишката се уравновесява от силата на тежестта, а $L_0 = R$. **(0.5 т.)**

Решение 3.1. Ако подадем напрежение между точки C и D, поради симетрията, пресечните точки на всеки от паралелите с всеки от четирите меридиана ще имат еднакъв потенциал и между тях няма да протича ток. Така ако изключим паралелите от веригата общото съпротивление няма да се промени и ще се определя то само от съпротивлението на четирите успоредни свързани меридиана. **(1 т.)** Дължината на всеки меридиан е $L_0 = \pi r$, а съпротивлението му е $R_0 = \rho L_0/S$. **(1 т.)** Тогава R_{CD} е:

$$R_{CD} = R_0/4 = \rho\pi r/(4S). \ \textbf{(1 т.)}$$

Решение 3.2. Сферата е симетрична спрямо двата меридиана, които не лежат в равнината $ACBD$ и по тях няма да тече ток, така че може да ги изключим от веригата и сферата ще изглежда като тази на фигурата. **(1 т.)** Съпротивлението ѝ ще се определя от това на трите успоредно свързани проводника между точки 1 и 2 (съотв. 3, 4 за долния полюс). Те от своя страна са вързани последователно на дъгите $\widehat{A1}$ и $\widehat{2B}$ (съотв. на $\widehat{B3}$ и $\widehat{4A}$ за долния полюс). **(1 т.)** Така общото съпротивление ще се определя от четири успоредно свързани съпротивления: над и под екватора както и двете половини на екватора, които имат съпротивление като това на меридианите – R_0. **(1 т.)**

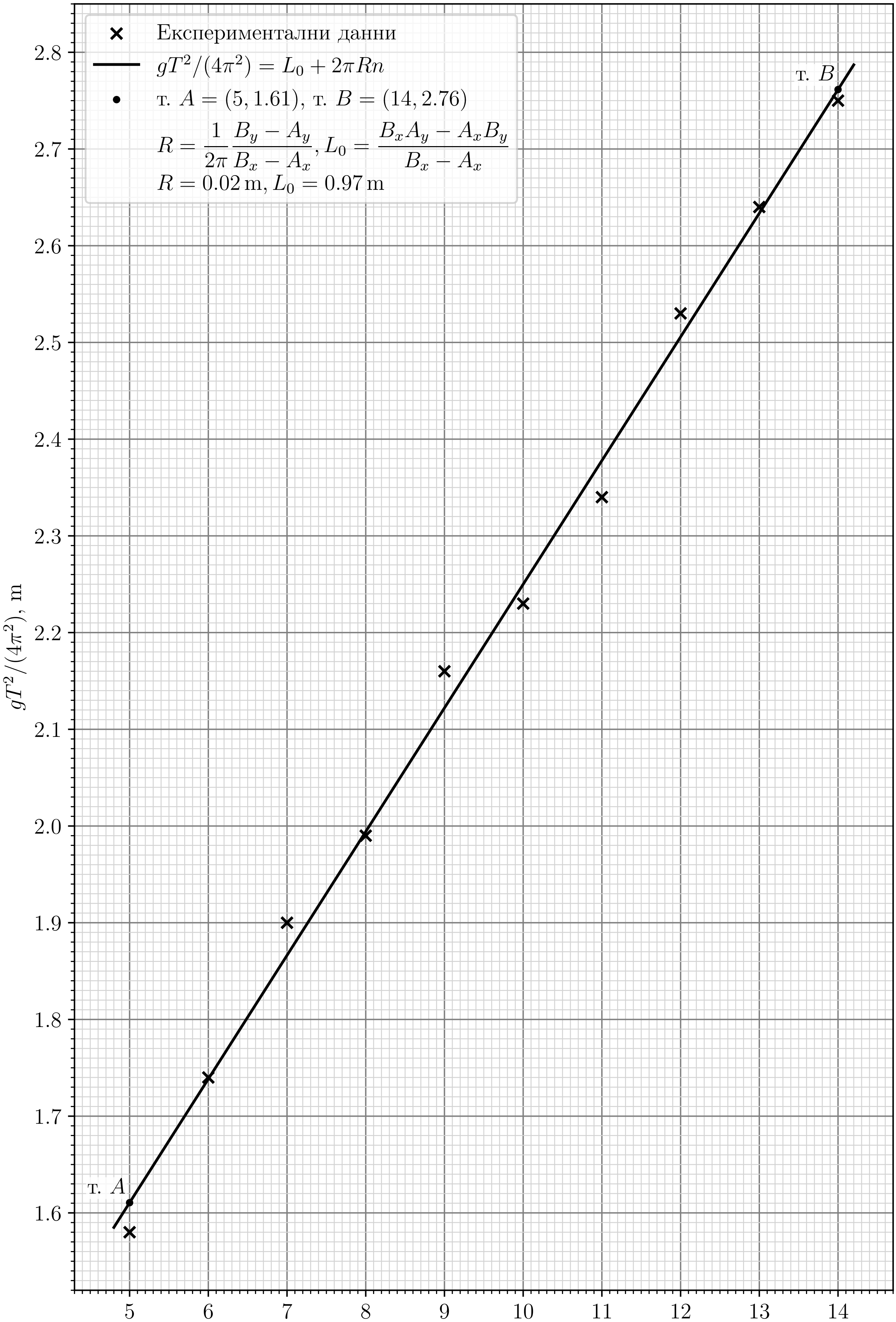


Дължината на всеки от малките паралели е $L_1 = 2\pi r/\sqrt{2}$, **(1 т.)** съответно съпротивлението им е $R_1 = \rho L_1/S$. **(1 т.)** Така получаваме:

$$1/R_{AB} = 2/R_0 + 2/[2R_0/4 + (R_1/4)(R_0/2)/(R_1/4 + R_0/2)]. \ \textbf{(1 т.)}$$

Като заместим $R_1 = \sqrt{2}R_0$ получаваме окончателния отговор:

$$R_{AB} = \frac{\sqrt{2}-1}{2} R_0 = \frac{\sqrt{2}-1}{2} \frac{\rho\pi r}{S} \text{ или } R_{AB} = \frac{1}{2(\sqrt{2}+1)} \frac{\rho\pi r}{S}. \ \textbf{(1 т.)}$$



Експериментални данни
$gT^2/(4\pi^2) = L_0 + 2\pi R n$
т. $A = (5, 1.61)$, т. $B = (14, 2.76)$
$R = \frac{1}{2\pi}\frac{B_y - A_y}{B_x - A_x}, L_0 = \frac{B_x A_y - A_x B_y}{B_x - A_x}$
$R = 0.02\,\mathrm{m}, L_0 = 0.97\,\mathrm{m}$
т. A
т. B
$gT^2/(4\pi^2)$, m
n, брой навивки