МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално есенно състезание по физика

Копривщица, 17–19 ноември 2023 г.

Решения на специалната тема

а) Силите, действащи на пръчката и топчето по време на удара, са перпендикулярни на пръчката. Следователно скоростите $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_C$ също са перпендикулярни на пръчката. От закона за запазване на импулса имаме:

(1) $$mv_0 = mv_1 + mv_C.$$ **[1 т]**

Като вземем предвид, че инерчният момент на пръчката спрямо нейния център е:

(2) $$I_C = \frac{1}{12}m(2l)^2 = \frac{1}{3}ml^2,$$ **[1 т]**

записваме закона за запазване на момента на импулса спрямо точка *C*:

(3) $$mv_0xl = mv_1xl + \frac{1}{3}ml^2\omega.$$ **[1 т]**

За еластичен удар е в сила и законът за запазване на механичната енергия:

(4) $$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}mv_C^2 + \frac{1}{6}\,ml^2\omega^2.$$ **[1 т]**

Преписваме трите закона за запазване, като съкратим общите множители и групираме в лявата страна само събираеми, отнасящи се за топчето, а в дясната – само за пръчката:

(5) $$v_0 - v_1 = v_C,$$

(6) $$(v_0 - v_1)x = \frac{1}{3}l\omega$$

(7) $$v_0^2 - v_1^2 = v_C^2 + \frac{1}{3}(l\omega)^2$$

От уравнения (5) и (6) намираме връзката $l\omega = 3xv_C$, след което преобразуваме уравнение (7) във вида:

(8) $$v_0^2 - v_1^2 = (1 + 3x^2)v_C^2.$$

След като разделим почленно уравнение (8) на уравнение (5), получаваме:

(9) $$v_0 + v_1 = (1 + 3x^2)v_C.$$

Уравненията (5), (6) и (9) образуват линейна система, от която определяме еднозначно търсените величини:

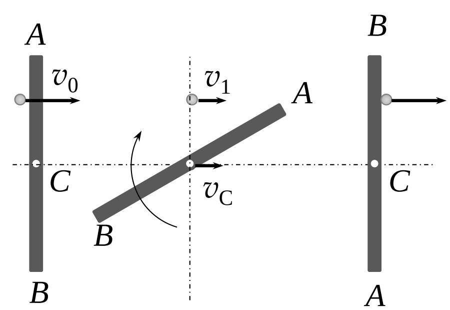
(10) $$v_C = \frac{2v_0}{2 + 3x^2},$$ **[1 т]**

(11) $$v_1 = \frac{3x^2 v_0}{2 + 3x^2},$$ **[1 т]**

(12) $$\omega = \frac{6xv_0}{(2 + 3x^2)l}.$$ **[1 т]**

б) За да спре след втория удар, пръчката трябва да получи импулс в посока, противоположна на посоката на $\vec{v}_C$. Следователно в момента на втория удар пръчката се е завъртяла на ъгъл $\varphi = 180° = \pi$ rad спрямо началното си положение и заставайки вертикално е ударила топчето отзад спрямо посоката му на движение, както е показано на фигурата. Ясно е, че центърът на пръчката и топчето ще лежат на една вертикална линия, ако се движат с еднаква скорост след първия удар:

(13) $$v_C = v_1.$$ **[1 т]**



От уравнения (10) и (11) следва, че:

(14) $$x_0 = \sqrt{\frac{2}{3}} \approx 0.816.$$ **[0.5 т]**

Времето между двата удара е равно на времето, за което пръчката се завърта на ъгъл φ:

(15) $$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi l(2 + 3x_0^2)}{6x_0 v_0} = \frac{\sqrt{6}\pi l}{3v_0}.$$ **[0.5 т]**

При $x = x_0$ скоростта на центъра е $v_C = v_0/2$ и следователно преместването на пръчката е:

(16) $$d = \frac{v_0 t}{2} = \frac{\sqrt{6}\pi}{6} l \approx 1.283\, l.$$ **[1 т]**

Задача 2. Неустойчивост на Плато-Рейли

а) I метод

При условие, че гравитацията не играе роля за протичане на явлението, следва, че времето t_d не зависи от g. От останалите три параметъра – r_0, σ и ρ, може да се състави еднозначно комбинация с размерност на време, защото броят на параметрите е равен на броя на основните единици:

$$t_\mathrm{d} = C r_0^\alpha \sigma^\beta \rho^\gamma,$$ **[0.3]**

където α, β и γ са неизвестни степенни показатели, а C е безразмерен коефициент на пропорционалност. Размерностите на величините във формулата, изразени чрез основни единици на SI, са:

$$[t_\mathrm{d}] = \mathrm{s},$$
$$[r_0] = \mathrm{m},$$
$$[\sigma] = \mathrm{N/m} = \mathrm{kg.\,s^{-2}},$$ **[0.3]**
$$[\rho] = \mathrm{kg.\,m^{-3}}.$$ **[0.1]**

След като изравним размерностите на двете страни, получаваме:

$$\mathrm{m^0 s^1 kg^0} = \mathrm{m^{\alpha-3\gamma}.\,s^{-2\beta}.\,kg^{\beta+\gamma}},$$

откъдето следва системата уравнения:

$$\left| \begin{aligned} \alpha - 3\gamma &= 0 \\ -2\beta &= 1 \\ \beta + \gamma &= 0 \end{aligned} \right.$$ **[0.3]**

която има решение:

$$\left| \begin{aligned} \alpha &= +3/2 \\ \beta &= -1/2 \\ \gamma &= +1/2 \end{aligned} \right.$$ **[0.5]**

Така окончателно намираме:

$$t_\mathrm{d} = C r_0^{3/2} \sigma^{-1/2} \rho^{1/2} \equiv C \sqrt{\frac{\rho r_0^3}{\sigma}}.$$ **[0.5]**

II метод

Комбинация с размерност на време може да се получи и чрез аналогия с познат закон, в който участват величини със същата рамерност, както в дадената задача. Например периодът на пружинно махало с маса m и коефициент на еластичност k се дава с израза:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$ **[0.5]**

Лесно можем да забележим, че повърхностното напрежение има същата размерност като коефициента на еластичност:

$$[k] = [\sigma] = \mathrm{N/m},$$ **[0.5]**

а масата – размерност на плътност по обем:

$$[m] = [\rho][V] = [\rho][r_0]^3.$$ **[0.5]**

Следователно, ако заместим в лявата страна периода с търсеното време, а в дясната страна – масата с ρr_0^3, коефициента на еластичност със σ и отчетем, че безразмерният коефициент C е неизвестен, получаваме равенство с размерност на време и от двете страни:

$$t_\mathrm{d} = C\sqrt{\frac{\rho r_0^3}{\sigma}}.$$ **[0.5]**

б1) От условието $r(x) = r(x+\lambda)$ за периодичност на вълната следва, че:

$$\sin(kx) = \sin(kx + k\lambda),$$ **[0.5]**

Понеже синусът има период 2π, за връзката между k (т.нар. *вълнов вектор*) и λ, получаваме:

$$k\lambda = 2\pi.$$ **[0.5]**

б2) В най-широкото или в най-тясното напречно сечение (т.е. перпендикулярно на x), радиусът на кривината съвпада с радиуса на струята:

$$R_1 \equiv r(x) = r_0 + A\sin(kx).$$ **[0.5]**

В надлъжно сечение (т.е. в равнината на чертежа):

$$1/R_2 = -r''(x) = k^2 A\sin(kx).$$ **[0.5]**

В най-широката част $\sin(kx) = 1$, откъдето следва $R_1 = r_0 + A$, $1/R_2 = k^2A$ и:

$$p_\text{ш} = \sigma\left(\frac{1}{r_0 + A} + k^2 A\right).$$ **[0.5]**

В най-тясната част $\sin(kx) = -1$, откъдето следва $R_1 = r_0 - A$, $1/R_2 = -k^2A$ и:

$$p_\text{т} = \sigma\left(\frac{1}{r_0 - A} - k^2 A\right).$$ **[0.5]**

б3) Струята е неустойчива, ако $p_\text{ш} < p_\text{т}$. Тогава по-високото налягане в тесните части води до по-нататъшното им стесняване, поради изтичане на течността към по-широките части, където налягането е по-ниско. От неравенството:

$$\sigma\left(\frac{1}{r_0 + A} + k^2 A\right) < \sigma\left(\frac{1}{r_0 - A} - k^2 A\right).$$ **[1.0]**

следва:

$$k^2 A < \frac{A}{r_0^2 - A^2}.$$

Ако пренебергнем A в сравнение с r_0 и вземем предвид, че $k = 2\pi/\lambda$, получаваме:

$$\lambda > \lambda_{\min} = 2\pi r_0, \qquad \textbf{[1.0]}$$

т.е. минималната дължина на вълната е равна на обиколката на струята. Този резултат съответства на експерименталното наблюдение на Плато, според което „... за да се разпадне струята на капки, дължината ѝ трябва да е поне 3.11–3.18 пъти по-голяма от нейния диаметър”.

б4) Струята се прекъсва в най-тесните си места, които се намират на разстояние $\lambda_{\min}$ едно от друго. Обемът течност между две стеснения е:

$$V_{\min} = \pi r_0^2 \lambda_{\min} = 2\pi^2 r_0^3. \qquad \textbf{[0.3]}$$

Откъсналата се течност образува сферична капка със същия обем, т.е.:

$$V_{\min} = \frac{4}{3}\pi r_{\min}^3, \qquad \textbf{[0.2]}$$

откъдето намираме:

$$r_{\min} = \sqrt[3]{\frac{3V_{\min}}{4\pi}} = r_0 \sqrt[3]{\frac{3\pi}{2}} \approx 1.68 r_0 \qquad \textbf{[0.5]}$$

в) Разстоянието h от отвора до мястото на откъсване на първата капка е равно на пътя при свободно падане с начална скорост v_0 в продължение на време t_d:

$$h = v_0 t_\mathrm{d} + \frac{g t_\mathrm{d}^2}{2}. \qquad \textbf{[0.2]}$$

Така намираме времето за разпадане на струята:

$$t_\mathrm{d} = \frac{v_0}{g}\left(\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}} - 1\right). \qquad \textbf{[0.4]}$$

За струята дестилирана вода отчитаме от снимката $h \approx 6.8$ cm и пресмятаме:

$$t_\mathrm{d} \approx 0.113 \text{ s}. \qquad \textbf{[0.2]}$$

Като използваме получения в т. а) израз за t_d, намираме безразмерния коефициент:

$$C = t_\mathrm{d}\sqrt{\frac{\sigma}{\rho r_0^3}} = 0.113 \text{ s} \times \sqrt{\frac{7.2 \times 10^{-2}\ \mathrm{kg/s^2}}{1.0 \times 10^3\ \mathrm{kg/m^3} \times 1.0 \times 10^{-9}\ \mathrm{m^3}}} \approx 30. \qquad \textbf{[0.5]}$$

За струята сапунен разтвор $h_1 \approx 16.0$ cm и съответно времето за разпадане на струята е:

$$t_{\mathrm{d},1} \approx 0.176\ \mathrm{s}. \qquad \textbf{[0.2]}$$

Като вземем предвид, че при един и същ радиус на струята и еднаква плътност на двете течности $t_{\mathrm{d}} \propto \sigma^{-1/2}$, получаваме:

$$\sigma_1 = \frac{\sigma t_{\mathrm{d}}^2}{t_{\mathrm{d},1}^2} = \frac{72\ \mathrm{mN/m} \times 0.123^2}{0.186^2} \approx 30\ \mathrm{mN/m}. \qquad \textbf{[0.5]}$$

Уточнение. Понеже разстоянията, които струите изминават преди да се разпаднат, не са точно дефинирани, за верни се приемат всички отчетени стойности в интервалите $5.0\ \mathrm{cm} \leq h \leq 7.0\ \mathrm{cm}$ и $14.0\ \mathrm{cm} \leq h_1 \leq 16.0\ \mathrm{cm}$. За верни се приемат стойности на C и σ_1, които са пресметнати правилно за съответните отчетени стойности на h и h_1.

Задача 3. Електромер

а) От II правило на Кирхоф следва:

$$-L_1 \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + U(t) = 0. \qquad \textbf{[0.5]}$$

Ако приемем, че $I_1(t) = I_{1,\max} \sin(\omega t + \varphi)$, получаваме:

$$-\omega L I_{1,\max} \cos(\omega t + \varphi) + U_{\max} \sin(\omega t) \equiv 0, \qquad \textbf{[0.5]}$$

откъдето следва:

$$I_{1,\max} = \frac{U_{\max}}{\omega L_1}, \qquad \textbf{[0.5]}$$

$$\varphi = -\pi/2 \qquad \textbf{[0.5]}$$

$$I_1(t) = -\frac{U_{\max}}{\omega L_1} \cos(\omega t) \qquad \textbf{[0.5]}$$

б) От определението за индуктивност следва, че общият магнитен поток през всички навивки на намотката 1 е:

$$\Phi_{\mathrm{tot}}(t) = L_1 I_1(t). \qquad \textbf{[0.5]}$$

Тъй като намотката е съставена от N_1 последователно свързани навивки, потокът през една отделна навивка, т.е. потокът през напречното сечение на сърцевината е:

$$\Phi_1(t) = \frac{\Phi_{\mathrm{tot}}(t)}{N_1} = \frac{L_1 I_1(t)}{N_1} = -\frac{U_{\max}}{\omega N_1} \cos(\omega t). \qquad \textbf{[0.5]}$$

Понеже всички индукционни линии на намотката се затварят през сърцевината, потокът на магнитното поле през металния лист също е равен на $\Phi_1(t)$. Нека разгледаме тънък пръстен от металния лист с радиус r и малка широчина Δr. В пръстена се индуцира ЕДН:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi_1(t)}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_{\max}}{N_1}\sin(\omega t). \qquad \textbf{[0.5]}$$

Съпротивлението на пръстена е:

$$R = \frac{\rho\ell}{S} = \frac{2\pi r\rho}{S}, \qquad \textbf{[0.5]}$$

където $S = b\Delta r$ е напречното сечение на пръстена. Индуцираният ток, който тече по пръстена е съответно:

$$I_{\mathrm{F}}(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{SU_{\max}}{2\pi\rho N_1 r}\sin(\omega t). \qquad \textbf{[0.5]}$$

От определението за плътност на тока получаваме:

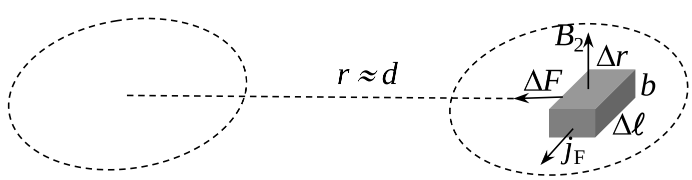
$$j_{\mathrm{F}}(t,r) = \frac{I_{\mathrm{F}}(t)}{S} = -\frac{U_{\max}}{2\pi\rho N_1 r}\sin(\omega t) = -\frac{U(t)}{2\pi\rho N_1 r}. \qquad \textbf{[1.0]}$$

Следователно плътността на токовете на Фуко в даден момент е пропорционална на моментната стойност на напрежението върху намотката.

в) Токовете на Фуко взаимодействат с магнитното поле $B_2(t)$, създадено от втората намотка в процепа на сърцевината, т.е. където магнитните индукционните линии пресичат диска. Тъй като радиусите на сърцевините на намотките са много по-малки от разстоянието d между тях, може да приемем, че плътността на токовете на Фуко в областта на процепа е постоянна:

$$j_{\mathrm{F}}(t,r) \approx j_{\mathrm{F}}(t,d) = -\frac{U(t)}{2\pi\rho N_1 d}. \qquad \textbf{[0.5]}$$

Нека разгледаме малък токов елемент с дължина $\Delta\ell$ в посока на j_{F}, и широчина Δr в перпендикулярно направление, т.е. успоредно на правата свързваща центровете на двата процепа, както е илюстрирано на фигурата по-долу.



Напречното сечение на токовия елемент в посока, перпендикулярна на токовата линия, съответно е: $\Delta S_\perp = b\Delta r$, а токът през напречното сечение:

$$\Delta I_{\mathrm{F}} = j_{\mathrm{F}}\Delta S_\perp = j_{\mathrm{F}} b\Delta r. \qquad \textbf{[0.5]}$$

От закона на Ампер следва, че на токовия елемент действа сила с големина:

$$\Delta F = \Delta I_{\mathrm{F}} \Delta \ell B_2 = j_{\mathrm{F}} b \Delta r \Delta \ell B_2 \qquad \textbf{[0.5]}$$

в посока, перпендикулярна на токовата линия, т.е. успоредно на правата, свързваща центровете на процепите. Като вземем предвид, че $\Delta r \Delta \ell B_2 = \Delta \Phi_2$ е потокът на магнитното поле през горната повърхност на токовия елемент, получаваме, че общата сила, действаща на индуцирания ток j_{F} е:

$$F = b j_{\mathrm{F}}(t, d) \Phi_2(t), \qquad \textbf{[0.5]}$$

където $\Phi_2(t)$ е общият магнитен поток през напречното сечение на втората намотка. Като вземем предвид, че:

$$\Phi_2(t) = \frac{L_2 I(t)}{N_2}, \qquad \textbf{[0.5]}$$

където $I(t)$ е моментната стойност на тока през консуматора, намираме:

$$F(t) = \frac{b L_2}{2\pi \rho N_1 N_2 d} P(t), \qquad \textbf{[1.0]}$$

където $P(t) = I(t) U(t)$ моментната стойност на мощността, която се отделя в консуматора. Тъй като $F(t) \propto P(t)$ във всеки момент, същата пропорционалност е в сила между средните стойности на силата и мощността. Следователно коефициентът на пропорционалност е:

$$k = \frac{b L_2}{2\pi \rho N_1 N_2 d}. \qquad \textbf{[0.5]}$$