МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
17 – 19 ноември 2023 г., Копривщица
Решения на темата за V състезателна група (11. клас)

Задача 1. Механика

Част I Общата извършена работа A от двамата работници е равна на нарастването на потенциалната енергия на всичката вода, извадена от кладенеца. Нека да означим плътността на водата с ρ, площта на напречното сечение на кладенеца с S, а големината на земното ускорение с g. Може да се съобрази, че $A = \rho g S h(d - h/2)$. **[0,5 т.]** Означаваме височината на водния стълб, който трябва да изгребе вторият работник, с x. Неговата работа е $\rho g S x\left(d - \frac{x}{2}\right) = \frac{A}{2} = \frac{\rho g S h}{2}\left(d - \frac{h}{2}\right)$. **[0,5 т.]** Оттук $2x(d - x/2) = h(d - h/2)$ и $x^2 - 2dx + h(d - h/2) = 0$. **[0,5 т.]** Физическото решение е $x = d - \sqrt{d^2 - hd + h^2/2}$. **[1 т.]** Първият работник изгребва вода с височина $h - x = h - d + \sqrt{d^2 - hd + h^2/2}$, откъдето следва, че търсеното отношение е $\frac{h-x}{x} = \frac{h-d+\sqrt{d^2-hd+h^2/2}}{d-\sqrt{d^2-hd+h^2/2}} = 2$, т.е. два пъти повече. **[1 т.]**

Част II а) Преместването на футболната топка в хоризонтално направление до момента на удара е $L = v_0 \cos\alpha\, t$. **[0,5 т.]** За това време топката се издига на височина $h_{\max} = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$ **[0,5 т.]**, докато топчето пада от височина H, т.е. $h_{\max} = H - \frac{v_0 t}{2} - \frac{gt^2}{2}$ **[0,5 т.]**. Оттук $t = \frac{2H}{v_0(1+2\sin\alpha)} = \frac{H}{v_0}$ и $L = \frac{2H\cos\alpha}{1+2\sin\alpha} = \frac{\sqrt{3}H}{2}$. **[1 т.]** Разстоянието е $D = \sqrt{L^2 + H^2} = \frac{\sqrt{7}H}{2} \approx 26$ m. **[1 т.]**

б) Футболната топка няма вертикална компонента на скоростта в момента на удара, т.е. $v_0 \sin\alpha - gt = 0$ и $t = \frac{v_0 \sin\alpha}{g} = \frac{H}{v_0}$. **[0,5 т.]** Следователно $v_0 = \sqrt{\frac{gH}{\sin\alpha}} = \sqrt{2gH} \approx 20\,\mathrm{m/s}$. **[1 т.]**

в) Изминалото време до удара е $t = \frac{H}{v_0} = \sqrt{\frac{H}{2g}} \approx 1$ s. **[0,5 т.]** Максималната височина на издигане е $h_{\max} = \frac{v_0 t}{2} - \frac{gt^2}{2} = \frac{H}{4} = 5$ m. **[1 т.]**

Задача 2. Трептящи системи

Част I а) В състояние на равновесие, на лявото трупче действа еластична сила $k\Delta\ell_0$ наляво и сила на опън T_0 надясно, като $k\Delta\ell_0 = T_0$. **[0,5 т.]** В същото време на дясното трупче действа силата на тежестта $m_д g$ надолу и сила на опън $2T_0$ (макарите са безмасови) нагоре, т.е. $m_д g = 2T_0$. **[0,5 т.]** Разтежението на пружината е $\Delta\ell_0 = \frac{T_0}{k} = \frac{m_д g}{2k} \approx 5$ cm. **[0,5 т.]**

б) Нека лявото трупче е отклонено на малко разстояние x надясно от равновесното му положение. Тогава разтежението на пружината ще бъде $\Delta\ell = \Delta\ell_0 + x$ и еластичната сила ще има нова големина $k(\Delta\ell_0 + x)$. Съответната сила на опън на нишката ще означим с T_x. Сумарната хоризонтална сила върху лявото трупче ще бъде $F_л = k(\Delta\ell_0 + x) - T_x$. **[0,5 т.]** Сумарната вертикална сила върху дясното трупче ще стане $F_д = 2T_x - m_д g$. **[0,5 т.]** Двете трупчета ще трептят хармонично с един и същ период T, тъй като отклонението на дясното трупче от равновесната му височина е винаги наполовина от отклонението на лявото трупче от неговото равновесно положение. **[0,5 т.]** Може да разгледаме трептенията на двете трупчета поотделно, като въведем ефективни коефициенти на еластичност $k_л$ и $k_д$, при което $F_л = k_л x$, а $F_д = k_д x/2$. Като използваме изразите за силите по-горе и формулата $T = 2\pi\sqrt{\frac{m_л}{k_л}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_д}{k_д}}$, ще получим, че $k_л = \frac{4m_л k}{4m_л + m_д}$. **[1 т.]** (Алтернативно, може да се използва сумарната кинетична енергия и фактът, че скоростта на дясното трупче е наполовина помалка от скоростта на лявото трупче.) Следователно периодът на хармоничните трептения на системата е $T = \pi\sqrt{\frac{4m_л + m_д}{k}} = \frac{\pi}{5}\text{s} \approx 0{,}6\ \text{s}$. **[1 т.]**

Част II а) Може да се съобрази, че максимална сила в т. О ще има при максимално *разтегната* пружина, т.е. в крайно дясно положение на теглилката. **[0,5 т.]** Отдясно на равновесното положение ластикът не е от значение и законът за запазване на енергията дава, че $\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{k_П A_д^2}{2}$, където с $A_д$ сме означили разстоянието от равновесното положение до крайното дясно положение на теглилката (амплитудата отдясно). **[0,5 т.]** Като знаем, че $F_{\max} = k_П A_д$, получаваме $m = \frac{k_П A_д^2}{v_{\max}^2} = \frac{F_{\max}^2}{k_П v_{\max}^2}$. **[1 т.]**

б) Отляво на равновесното положение ластикът се държи като разтегната пружина и от закона за запазване на енергията следва, че $\frac{mv_{\max}^2}{2} = \frac{k_П A_л^2}{2} + \frac{k_Л A_л^2}{2}$, където с $A_л$ сме означили разстоянието от равновесното положение до крайното ляво положение на теглилката (амплитудата отляво). **[0,5 т.]** Търсеното разстояние е $d = A_л + A_д = v_{\max}\left(\sqrt{\frac{m}{k_П + k_Л}} + \sqrt{\frac{m}{k_П}}\right) = F_{\max}\left(\frac{1}{\sqrt{k_П(k_П + k_Л)}} + \frac{1}{k_П}\right)$. **[1 т.]**

в) От горните разсъждения може да се види, че за един период теглилката се намира отдясно на равновесното си положение за време $\pi\sqrt{\frac{m}{k_П}}$ **[0,5 т.]**, а отляво – за време $\pi\sqrt{\frac{m}{k_П + k_Л}}$ **[0,5 т.]**, т.е. $T = \pi\left(\sqrt{\frac{m}{k_П + k_Л}} + \sqrt{\frac{m}{k_П}}\right) = \frac{\pi F_{\max}}{v_{\max}}\left(\frac{1}{\sqrt{k_П(k_П + k_Л)}} + \frac{1}{k_П}\right)$ **[0,5 т.]**.

Задача 3. Електрически вериги

Част I Еквивалентното съпротивление на свързването с една батерия е $R_1 = R + r$. Токът през резистора е съответно $I_1 = \frac{\mathcal{E}}{R_1} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}$, а отделената мощност е $P_1 = I_1^2 R = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2}$. **[1 т.]** При свързването с две батерии еквивалентното съпротивление на веригата се увеличава и става $R_2 = R + 2r$. Токът в този случай е $I_2 = \frac{2\mathcal{E}}{R_2} = \frac{2\mathcal{E}}{R + 2r}$, докато мощността става $P_2 = I_2^2 R = \frac{4\mathcal{E}^2 R}{(R + 2r)^2}$. **[1 т.]** Оттук следва, че $\frac{P_2}{P_1} = \frac{4(R + r)^2}{(R + 2r)^2} = 3$ и $8r^2 + 4Rr - R^2 = 0$. **[0,5 т.]** Положителният корен на квадратното уравнение е $r = \frac{(\sqrt{3} - 1)R}{4} \approx 0{,}18\ \Omega$. **[1 т.]** Електродвижещото напрежение е $\mathcal{E} = (R + r)\sqrt{\frac{P_1}{R}} = \frac{(3 + \sqrt{3})\sqrt{RP_1}}{4} \approx 3{,}7\ \text{V}$. **[1 т.]**

Част II а) В началото долният кондензатор е директно свързан с дясната батерия, т.е. напрежението между неговите електроди е $2\mathcal{E} = \frac{q_1}{C_1}$ и съответно $\mathcal{E} = \frac{q_1}{2C_1} = 1{,}5\ \text{V}$. **[1 т.]** От външния контур на веригата може да се съобрази, че горният кондензатор е свързан с двете последователно свързани батерии, откъдето $q_2 = C_2(\mathcal{E} + 2\mathcal{E}) = 3C_2\mathcal{E} = 13{,}5\ \text{mC}$. **[1 т.]**

б) След превключването долният кондензатор се свързва директно с лявата батерия, което води до смяна на полярността на кондензатора и нов заряд $q_1' = C_1\mathcal{E}$. **[1 т.]** Горният кондензатор е свързан по същия начин, т.е. при него няма промяна. **[0,5 т.]** Оттук следва, че изменението на зарядите на електродите на долния кондензатор се дължи единствено на ток от лявата батерия (през амперметъра) и съответно $Q = q_1 + q_1' = \frac{3q_1}{2} = 9\ \text{mC}$. **[1 т.]**

в) Тъй като горният електрод на долния кондензатор от положително зареден става отрицателно зареден, т.е. протича ток от горния електрод към отрицателния полюс на лявата батерия, то *лявата батерия се разрежда*. **[0,5 т.]** Запазването на зарядите върху електродите на горния кондензатор след превключването означава, че *дясната батерия остава със същия заряд*. **[0,5 т.]**