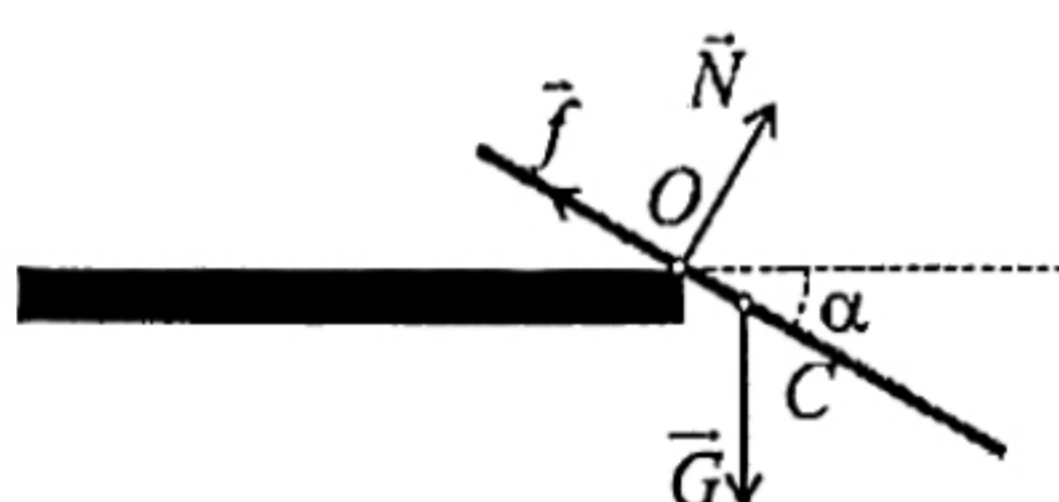


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Сливен, 11–13 ноември 2022 г.
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Преобръщане на пръчка

На фигурата са показани силите, действащи на пръчката:



За всяка сила с правилно означена посока и приложна точка $\times 0.5$ точки: **максимум [1.5]**

Докато започне хлъзгането, пръчката се върти около ръба O на масата. От теоремата на Щайнер намираме инерчния момент на пръчката спрямо т. O :

$$(1) \quad I_O = \frac{1}{12} m \ell^2 + m x^2, \quad [1.0]$$

където $I_C = (1/12)m\ell^2$ е инерчният момент на пръчката спрямо нейния център на масата C , а $x = |OC|$. Ако пръчката сключва с хоризонта ъгъл α , тя се върти около O с ъглова скорост ω , която може да бъде определена от закона за запазване на енергията:

$$(2) \quad \frac{1}{2} I_O \omega^2 = m g x \sin \alpha, \quad [1.0]$$

понеже силата \vec{f} на триене е приложена към неподвижна точка и не върши работа. Оттук намираме: $\omega^2 = 24 g x \sin \alpha / (\ell^2 + 12 x^2)$ и съответно определяме нормалното ускорение на центъра на масата:

$$(3) \quad a_n = \omega^2 x = \frac{24 g x^2 \sin \alpha}{\ell^2 + 12 x^2} \quad [1.0]$$

От II принцип на механиката, записан в проекции по дължината на пръчката:

$$(4) \quad m a_n = f - G \sin \alpha, \quad [0.5]$$

изразяваме силата на триене:

$$(5) \quad f = m a_n + m g \sin \alpha = \left(\frac{\ell^2 + 36 x^2}{\ell^2 + 12 x^2} \right) m g \sin \alpha. \quad [0.5]$$

Нека ε е ъгловото ускорение на пръчката спрямо ръба на масата. От основното уравнение за въртене около неподвижна ос:

$$(6) \quad I_O \varepsilon = m g x \cos \alpha \quad [1.0]$$

определяме тангенциалното ускорение на точка C :

$$(7) \quad a_\tau = \varepsilon x = \frac{12 g x^2 \cos \alpha}{\ell^2 + 12 x^2}. \quad [1.0]$$

Записваме II принцип на механиката за направление, перпендикулярно на пръчката:

$$(8) \quad m a_\tau = G \cos \alpha - N, \quad [0.5]$$

и намираме силата на нормална реакция на масата:

$$(9) \quad N = m g \cos \alpha - m a_\tau = \left(\frac{\ell^2}{\ell^2 + 12 x^2} \right) m g \cos \alpha. \quad [0.5]$$

Докато пръчката се върти около ръба на масата, е изпълнено: $f \leq \mu N$, т.е:

$$(10) \quad (\ell^2 + 36 x^2) \sin \alpha \leq \mu \ell^2 \cos \alpha \quad [0.5]$$

Знакът за равенство съответства на момента, в който пръчката започва да се хлъзга, т.е. когато $\alpha = \alpha_{\max}$. Оттук намираме:

$$(11) \quad \alpha_{\max} = \text{atan} \left(\frac{\mu \ell^2}{\ell^2 + 36 x^2} \right) \approx 20^\circ. \quad [1.0]$$

Задача 2. Ядрен магнитен резонанс

а) Моларната маса на захарозата е:

$$(1) \quad \mu = 12 \times 12 \text{ g/mol} + 22 \times 1 \text{ g/mol} + 11 \times 16 \text{ g/mol} = 342 \text{ g/mol}.$$

Следователно кристалчето съдържа количество вещество

$$(2) \quad n = \frac{m}{\mu} = \frac{1.0 \times 10^{-3} \text{ g}}{342 \text{ g/mol}} \approx 2.92 \times 10^{-6} \text{ mol}$$

и съответно:

$$(3) \quad N = nN_A \approx 1.76 \times 10^{18}$$

молекули захароза. Понеже една молекула захароза съдържа 22 атома водород, общият брой атоми водород (и съответно протони) е:

$$(4) \quad N_H = 22N \approx 3.87 \times 10^{19}. \quad [1.0]$$

Тъй като магнитният момент на всички протони е в една посока, общият магнитен момент на кристалчето е:

$$(5) \quad M = N_H p_m = \frac{22m p_m N_A}{\mu} \approx 5.42 \times 10^{-7} \text{ A. m}, \quad [0.5]$$

а общият момент на импулса (общият спин):

$$(6) \quad L = N_H S = \frac{11m N_A \hbar}{\mu} \approx 2.03 \times 10^{-15} \text{ kg. m}^2/\text{s}, \quad [0.5]$$

б) Върху магнитен дипол, поставен в магнитно поле, действа въртящ момент:

$$(7) \quad \vec{T} = \vec{M} \times \vec{B}_0 = (M \sin \theta \hat{x} + M \cos \theta \hat{z}) \times B_0 \hat{z} = -MB_0 \sin \theta \hat{y}, \quad [0.5]$$

защото $\hat{z} \times \hat{z} = 0$ и $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$. Следователно големината на въртящия момент е:

$$(8) \quad T = MB_0 \sin \theta \approx 1.36 \times 10^{-6} \text{ N. m}. \quad [0.5]$$

Посоката на \vec{T} е в отрицателната посока на оста Y . [0.5]

в) Скоростта, с която се променя моментът на импулса на кристалчето, е:

$$(9) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{T}. \quad [0.5]$$

При прецесия векторът \vec{L} се върти с постоянна ъглова скорост $\vec{\omega}$, успоредна на посоката на магнитното поле, т.е. по оста Z . Следователно:

$$(10) \quad \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}, \quad [0.5]$$

откъдето следва:

$$(11) \quad \left| \frac{d\vec{L}}{dt} \right| = \omega L \sin \theta. \quad [0.5]$$

Като вземем предвид израза (5) за общия магнитен момент, (6) за общия момент на импулса и (8) за големината на въртящия момент, получаваме уравнението:

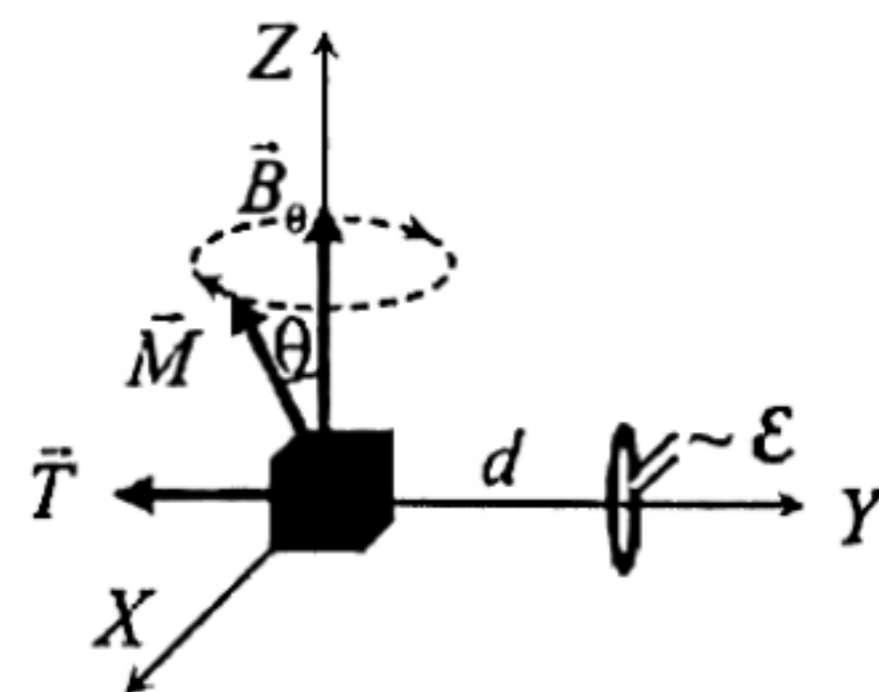
$$(12) \quad \frac{11m N_A \hbar \sin \theta}{\mu} \omega = \frac{22m p_m N_A B_0 \sin \theta}{\mu}, \quad [0.5]$$

откъдето намираме кръговата честота на прецесия:

$$(13) \quad \omega = \frac{2p_m B_0}{\hbar} \approx 1.33 \times 10^9 \text{ rad/s}, \quad [1.0]$$

г) При прецесията на магнитния момент, се променят неговите компоненти по X и Y . Магнитното поле, дължащо се на X компонентата на магнитния момент, не води до магнитен поток през намотката. [0.5]

Следователно индуцираното в намотката ЕДН се дължи единствено на променливата Y компонентата:



$$(14) \quad M_y(t) = -M \sin \theta \sin(\omega t), \quad [0.5]$$

която създава в центъра на навивката променливо магнитно поле с индукция:

$$(15) \quad B_y(t) = \frac{\mu_0 M_y(t)}{2\pi d^3} = -\frac{\mu_0 M \sin \theta \sin(\omega t)}{2\pi d^3}. \quad [0.5]$$

Понеже намотката е с малки размери, можем да приемем, че полето през напречното ѝ сечение е практически еднородно. Следователно магнитният поток през намотката е:

$$(16) \quad \Phi(t) = B_y(t)A = -\frac{\mu_0 MA \sin \theta \sin(\omega t)}{2\pi d^3}. \quad [0.5]$$

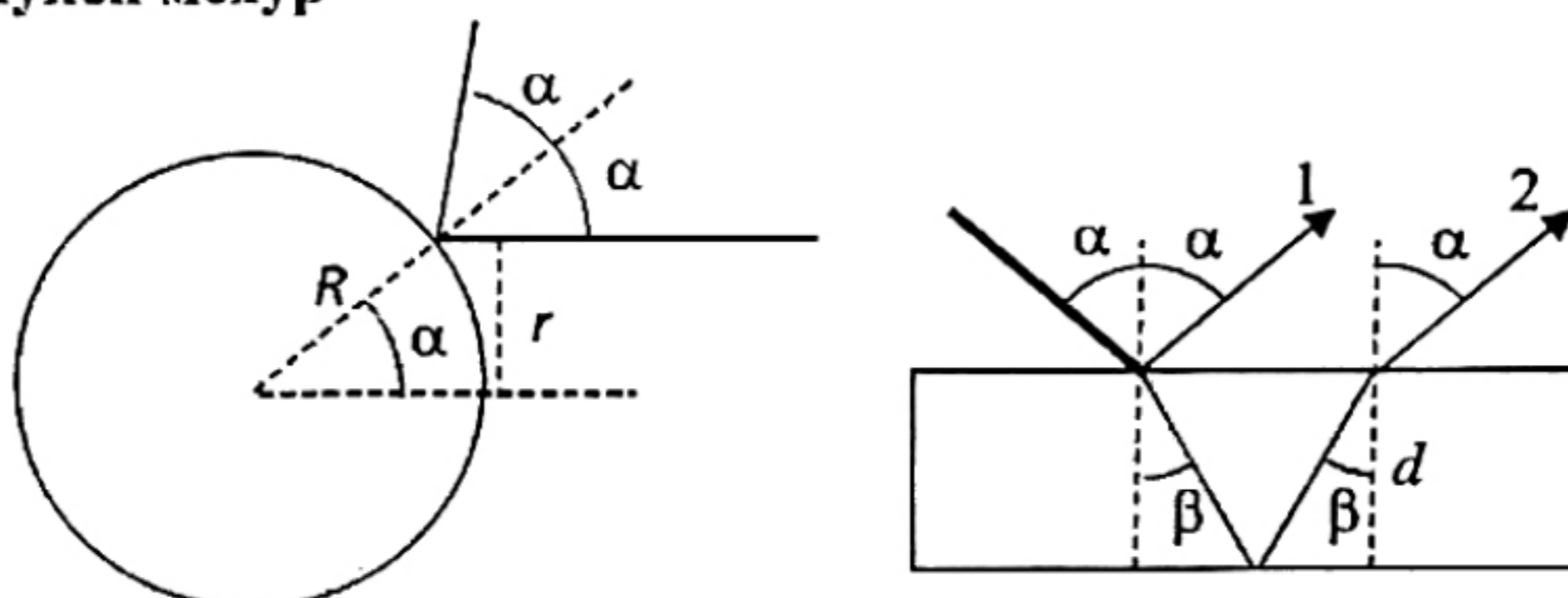
Съгласно със закона на Фарадей, в намотката се индуцира променливо напрежение:

$$(17) \quad \mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = \frac{\mu_0 MA \omega \sin \theta \cos(\omega t)}{2\pi d^3}. \quad [0.5]$$

Следователно ефективната стойност на напрежението в намотката е:

$$(18) \quad \mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\mu_0 \omega MA \sin \theta}{4\pi d^3} \approx 4.1 \times 10^{-5} \text{V}. \quad [1.0]$$

Задача 3. Сапунен мехур



Тъй като фотоапаратът е на голямо разстояние от мехура, във фотоапарата попадат практически успоредни лъчи. От фигурата вляво се вижда, че тъмен или светъл пръстен с радиус r съответства на лъчи, падащи върху мехура под ъгъл α , такъв че:

$$(1) \quad \sin \alpha = \frac{r}{R}, \quad [0.25]$$

където R е радиусът на мехура. Светлите (тъмните) пръстени се дължат на конструктивна (деструктивна) интерференция между светлинни вълни, отразени съответно от външната и от вътрешната повърхност на сапунената ципа. Тъй като дебелината на ципата е много малка, може да приемем, че интерфериращите вълни се отразяват от плоскопаралелна пластина. От закона на Снелиус следва, че ъгълът β на пречупване в ципата е такъв, че:

$$(2) \quad \sin \beta = \frac{\sin \alpha}{n}, \quad [0.25]$$

От фигурата вдясно се вижда, че оптичният път на вълната 1, отрезена от външната повърхност е:

$$(3) \quad s_1 = \frac{\lambda}{2} + 2d \sin \alpha \tan \beta = \frac{\lambda}{2} + \frac{2d \sin^2 \alpha}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}}, \quad [1.0]$$

като сме взели предвид, че вълната се отразява от оптически по-плътна среда. Вълната 2 изминава в ципата оптичен път:

$$(4) \quad s_2 = \frac{2dn}{\cos \beta} = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2 - \sin^2 \alpha}} \quad [1.0]$$

От условието за интерференчен максимум:

$$(5) \quad s_2 - s_1 = k\lambda$$

и израза (1) за $\sin \alpha$ получаваме за радиуса на светлите пръстени:

$$(6) \quad 2d\sqrt{n^2 - r^2/R^2} = k\lambda + \lambda/2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad [0.5]$$

За радиуса на тъмните пръстени съответно имаме:

$$(7) \quad 2d\sqrt{n^2 - r^2/R^2} = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots). \quad [0.5]$$

От получените формули следва, че на пръстените с по-голям радиус съответства максимум (минимум) от по-малък порядък. Затова номерираме пръстените с целочислен индекс $m = 1, 2, \dots$ от най-външния светъл (тъмен) пръстен към центъра, като индексът m в общия случай не съвпада с порядъка k на максимума (минимума). Затова условията (6) и (7) може да бъдат записани с едно уравнение:

$$(8) \quad \sqrt{n^2 - r^2/R^2} = m \frac{\lambda}{2a} + C, \quad [0.5]$$

където стойността на константата C зависи от това дали става въпрос за максимум или за минимум. От тук се вижда, че ако въведем променливи:

$$(9) \quad x \equiv m \text{ и } y \equiv \sqrt{n^2 - r^2/R^2}, \quad [0.5]$$

получаваме линейна зависимост:

$$(10) \quad y = Ax + C,$$

където:

$$(11) \quad A = \frac{\lambda}{2d} \quad [0.5]$$

е еднакъв за светлите и за тъмните пръстени коефициент на наклон на правата. За да определим A , а оттам и търсената дебелина d , измерваме с линейка диаметъра $2R$ на мехура и диаметрите $2r$ на светлите пръстени (в средата на пръстена). Резултатите са нанесени в таблица 1. След това пресмятаме съответните стойности на променливата y и също нанасяме стойностите в таблицата.

Таблица 1.

| $2R = 5.1 \text{ cm}$ | | |
|-----------------------|-------------------|------|
| $m = x$ | $2r \text{ (cm)}$ | y |
| 1 | 4.9 | 0.95 |
| 2 | 4.4 | 1.04 |
| 3 | 3.8 | 1.13 |
| 4 | 3.1 | 1.21 |
| 5 | 2.0 | 1.29 |

За измерване на диаметъра на мехура – 0.25 точки

За измервания и пресмятания на всеки ред от таблицата – по 0.25 точки

От таблицата построяваме графика на y от x (т.е. от m) и прекарваме апроксимираща права по експерименталните точки.

За всяка правилно нанесена точка – 0.25

За надписи върху осите – общо 0.25

За поне 50% запълване на площта на координатната мрежа – 0.5

От правата определяме коефициент на наклона:

$$(12) \quad A \approx 0.088 \quad [0.5]$$

и намираме дебелината на ципата:

$$(13) \quad d = \frac{\lambda}{2A} \approx 3.1 \times 10^3 \text{ nm} = 3.1 \text{ } \mu\text{m}. \quad [1.0]$$

Точкуването е същото, ако вместо светлите пръстени се измерват тъмните пръстени.

