МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Нациовнално есенно състезание по физика
Велико Търново, 8-10 ноември 2019 г.
Примерни решения на специалната тема (6. състезателна група)

Задача 1. Падащ пясък

Част 1. Приемаме за нулев момента на минаване на кутията през равновесно положение. Тогава отместването на кутията се описва с уравнението:

(1) $$x_{\text{box}}(t) = A\sin(\omega t).$$ **[0.5 т]**

Да разгледаме падаща песъчинка, която в даден момент t се намира под кутията в точка с вертикална координата y. Това означава, че песъчинката е падала до този момент в продължение на време:

(2) $$t_{\text{f}} = \sqrt{2y/g}.$$ **[0.5 т]**

Следователно песъчинката се е отделила от отвора в по-ранен момент:

(3) $$t_{\text{d}} = t - t_{\text{f}} = t - \sqrt{2y/g}$$ **[1.0 т]**

в точка с x-координата:

(4) $$x_{\text{d}} = x_{\text{box}}(t - t_{\text{f}}) = A\sin\left(\omega\left(t - \sqrt{2y/g}\right)\right)$$ **[1.0 т]**

и с хоризонтална скорост:

(5) $$v_{\text{d}} = \omega A\cos\left(\omega\left(t - \sqrt{2y/g}\right)\right).$$ **[1.0 т]**

Следователно x-координатата на песъчинката в момента t е:

(6) $$x = x_{\text{d}} + v_{\text{d}}t_{\text{f}} = A\sin\left(\omega\left(t - \sqrt{2y/g}\right)\right) + \omega A\sqrt{2y/g}\cos\left(\omega\left(t - \sqrt{2y/g}\right)\right).$$ **[1.0 т]**

В момента $t = 0$ получаваме:

(7) $$x = A\omega\sqrt{2y/g}\cos\left(\omega\sqrt{2y/g}\right) - A\sin\left(\omega\sqrt{2y/g}\right).$$ **[1.0 т]**

Интересно е, че ако изберем безразмерни координати: $\tilde{x} = x/A$ и $\tilde{y} = 2y\omega^2/g$ уравнението на струята се описва с универсална футкция:

(8) $$\tilde{x} = \sqrt{\tilde{y}}\cos\sqrt{\tilde{y}} - \sin\sqrt{\tilde{y}}.$$

Част 2. Прилагаме уравнение (6) за песъчинка, която се удря в пода в момнта t. Понеже в този момент $y = H$, x-координатата на песъчинката е:

(9) $$x = A\sin\left(\omega\left(t - \sqrt{2H/g}\right)\right) + \omega A\sqrt{2H/g}\cos\left(\omega\left(t - \sqrt{2H/g}\right)\right).$$ **[1.0 т]**

От полученото уравнение виждаме, че x-координатата на падащия пясък е суперпозиция на две хармонични трептения, отместени по фаза с $\pi/2$ **[1.0 т]**.

Следователно „амплитудата” A_1 на трептенето на пясъчната струя е:

(10) $$A_1 = \sqrt{A^2 + 2\,\omega^2 A^2 H/g} = A\sqrt{1 + 2\,\omega^2 H/g}.$$ **[1.0 т]**

Дължината на образуваната пясъчна леда е равна на удвоената амплитуда:

(11) $$L = 2A\sqrt{1 + 2\,\omega^2 H/g}.$$ **[1.0 т]**

Задача 2. Магниттен капан

Част 1. Частиците се движат през цялото време в равнината, в която са излъчени. Избираме декартова координатна система *XYZ*, където оста *X* съвпада с проводника и е по посока на тока, оста *Y* е перпендикулярна на проводника и насочена към източника на йони, а оста *Z* е перпендикулярна на равнината на движение. Разглеждаме йон, чиято начална скорост сключва ъгъл α с оста *X*, т.е. компонентите на скоростта му са съответно:

(1) $$v_{0x} = v\cos\alpha$$ **[0.25 т]**

и

(2) $$v_{0\mathrm{y}} = v\sin\alpha.$$ **[0.25 т]**

Във всеки момент уравненията за движение на частицата по двете оси имат вида:

(3) $$m\dot{v}_x = qv_yB_z(y)$$ **[0.5 т]**

и

(4) $$m\dot{v}_y = -qv_xB_z(y),$$ **[0.5 т]**

където:

(5) $$B_z(y) = \frac{\mu_0 I}{2\pi y}$$ **[0.5 т]**

е Z-компонентата на магнитната индукция на разстояние y от проводника (*X*- и *Y*-компонентите са нула)..Като вземем предвид, че $v_y = \dot{y} = \mathrm{d}y/\mathrm{d}t$, получаваме връзка между промяната $\mathrm{d}v_x$ на скоростта по *X* и малко преместване $\mathrm{d}y$ по *Y*:

(6) $$\mathrm{d}v_x = \frac{\mu_0 Iq\mathrm{d}y}{2\pi my}$$ **[1.0 т]**

Интегрираме двете страни на уравнението от началния момент, когато $y_0 = d$ до произволен момент. Така получаваме връзка между моментната стойност на *X*-компонентата на скоростта и моментната стойност на координатата y:

(7) $$v_x - v\cos\alpha = \frac{\mu_0 Iq}{2\pi m}\ln\left(\frac{y}{d}\right)$$ **[0.5 т]**

Когато частицата достига минимално или максимално разстояние от проводника, нейната *Y*-компонента на скоростта е нула. Понеже магнитното поле не върши работа върху частицата, кинетичната енергия, а следователно и големината на скоростта на частицата се запазва, т.е. $v_x = \pm v$. Следователно екстремните координати на частицата удоволетворяват условието:

(8) $$\pm v - v\cos\alpha = \frac{\mu_0 Iq}{2\pi m}\ln\left(\frac{y_{\max,\min}}{d}\right)$$ **[1.0 т]**

или

(9) $$y_{\max,\min} = d\exp\left(\frac{2\pi mv}{\mu_0 Iq}(\pm 1 - \cos\alpha)\right).$$

Най-голямо разстояние от всички излъчени йони достигат тези, които са излъчени под ъгъл $\alpha = 180^\circ$, т.е. в посока противоположна на тока:

(10) $$r_{\max} = d\exp\left(\frac{4\pi mv}{\mu_0 Iq}\right).$$ **[0.25 т]**

Минималното разстояние съответства на частици, излъчени по посока на тока, т.е. под ъгъл $\alpha = 0^\circ$:

(11) $$r_{\min} = d\exp\left(-\frac{4\pi mv}{\mu_0 Iq}\right).$$ **[0.25 т]**

Интересен факт е, че $r_{\max}r_{\min} = d^2$.

Част 2. Траекториите на частиците са изобразени качествено на фигурата.

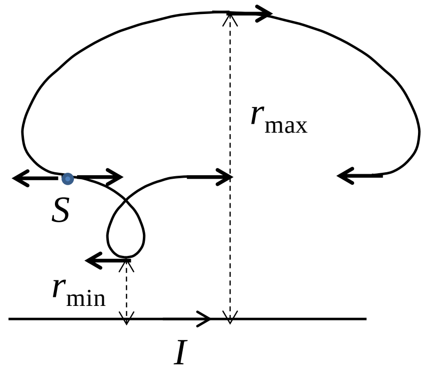
Критерии за оценка на чертежа

Максимално разстояние съответства на частици, излъчени в посока, противоположна на посоката на тока. **[0.5 т]**

Радиусът на кривината при върха на траекторията е по-голям, отколкото в точката на тръгване. **[0.5 т]**

Минималноо разстояние съответства на частици, излъчени по посоката на тока. **[0.5 т]**

Радиусът на кривината в най-ниската част на траекторията е по-малък, отколкото в точката на тръгване. **[0.5 т]**



Част 3. От уравнения (4) и (5), като вземем предвид, че $\dot{v}_y \equiv \ddot{y}$, изразяваме моментната скорост на йона в посока на оста X:

(12) $$v_x = -\frac{2\pi m y \ddot{y}}{\mu_0 q I},$$ **[0.25 т]**

В най-грубо приближение можем да приемем, че йонът се движи в еднородно магнитно поле с индукция:

(13) $$B_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi d}$$ **[0.25 т]**

и описва окръжност с радиус:

(14) $$R = \frac{mv}{qB_z} = \frac{2\pi m v d}{\mu_0 I q}$$ **[0.25 т]**

с ъглова скорост:

(15) $$\omega = \frac{v}{R} = \frac{\mu_0 I q}{2\pi m d}$$ **[0.25 т]**

Y-координатата на йон, излъчен перпендикулярно на проводника се дава приблизително със закона за хармонично трептене:

(16) $$y = d + R\sin(\omega t)$$ **[0.5 т]**

Съответно за втората производна на y имаме:

(17) $$\ddot{y} = -\omega^2 R \sin(\omega t).$$ **[0.5 т]**

Като заместим y и $\ddot{y}$ в уравнение (12), получаваме:

(18) $$v_x = \frac{2\pi m}{\mu_0 q I}\omega^2 R(d\sin(\omega t) + R\sin^2(\omega t)).$$

Дрейфовата скорост съответства на средната скорост в направление на X. Като вземем предвид, че:

(19) $$\omega R = v,\quad \langle \sin(\omega t)\rangle = 0,\quad \langle \sin^2(\omega t)\rangle = 1/2,$$ **[0.5 т]**

намираме:

(20) $$v_{\mathrm{d}} \equiv \langle v_x \rangle = \frac{\pi m v^2}{\mu_0 q I}.$$ **[0.5 т]**

Както се вижда от получения израз, знакът на дрейфовата скорост съвпада със знака на тока. Следователно йоните се преместват в посоката, в която тече токът.

Задача 3. Топлинна леща

Чакт 1. Разглеждаме цилиндричен участък от пластинката с радиус r ($r < a$). Погълнатата топлинна мощност от този участък е:

(1) $$P = \frac{1}{2}IS = \frac{\pi r^2 I}{2}.$$ **[0.5 т]**

Същата топлинна мощност се предава през околната повърхност на цилиндъра към периферията на пластинката:

(2) $$\frac{\pi r^2 I}{2} = -2\pi r b k \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r}.$$ **[1.0 т]**

Оттук за градиента на температурата в радиално направление получаваме:

(3) $$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}r} = -\frac{Ir}{4bk}.$$ **[0.5 т]**

След като интегрираме уравнение (3), получаваме:

(4) $$T(r) = C - \frac{Ir^2}{8bk}.$$ **[0.5 т]**

Интеграционната константа C може да бъде определена от условието $T(a) = T_1$, т.е.

(5) $$C = T_1 + \frac{Ia^2}{8bk}.$$ **[0.5 т]**

Така окончателно получаваме:

(6) $$T(r) = T_1 + \frac{I(a^2 - r^2)}{8bk}.$$ **[1.0 т]**

Оттук определяме разликата между ткемпературите в центъра и периферията на пластинката:

(7) $$\Delta T = T(0) - T_1 = \frac{Ia^2}{8bk} \approx 63\ \text{K}.$$ **[1.0 т]**

Част 2.. Показателят на пречупване на пластинката се изменя в радиално направление по закона:

(8) $$n(r) = n_1 + \frac{\gamma I(a^2 - r^2)}{8bk}.$$ **[1.0 т]**

От принципа на Ферма следва, че светлинният сноп ще се фокусира в дадена точка зад пластинката, ако лъчите, падащи на различно разстояние r от центъра на пластинката изминават еднакъв оптимчен път до тази точка. Както се вижда от фигурата, оптичният път на лъч, падащ на разстояние r, е:

(9) $$s(r) = n(r)b + \sqrt{f^2 + r^2} = bn_1 + \frac{\gamma I(a^2 - r^2)}{8k} + \sqrt{f^2 + r^2}.$$ **[1.0 т]**

Ако предположим, че показателят на пречупване се изменя слабо в радиално направление, лъчът се отклонява на малък ъгъл от пластинката, т.е. $r \ll f$. Тогава за квадратния корен можем да използваме приблизителното равенство на Бернули:

(10) $$\sqrt{f^2 + r^2} \approx f + \frac{r^2}{2f}.$$ **[0.5 т]**

Съответно за оптичния път получаваме приблизителния израз:

(11) $$s(r) \approx bn_1 + f + \frac{\gamma I(a^2 - r^2)}{8k} + \frac{r^2}{2f}.$$ **[0.5 т]**

За да настъпи фокусирране, оптичният път не трябва да зависи от r, т.е. коефициентът пред r^2 трябва да е нула:

(12) $$\frac{r^2}{2f} - \frac{\gamma I r^2}{8k} = 0.$$ **[1.0 т]**

Така намираме фокусното разстояние на топлинната леща:

(13) $$f = \frac{4k}{\gamma I} = 1.6\ \text{m}.$$ **[1.0 т]**