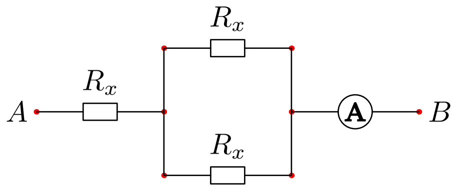
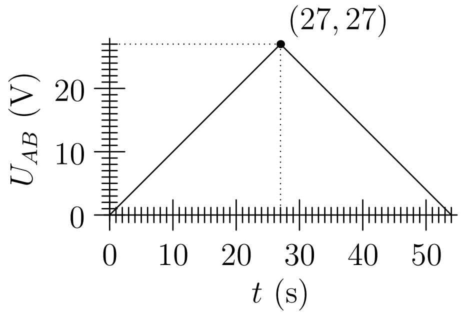
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
1–3 ноември 2018 г., гр. Сандански
Тема за 9. клас, трета състезателна група
Решения и указания

Задача 1. Всеки от елементите R_x, използвани в електрическата схема, показана на Фигура 1, може да променя съпротивлението си в зависимост от напрежението U_x върху него. Между точките A и B се подава напрежение U_{AB}, което бавно се променя с времето t, както е показано на Фигура 2. Зависимостта на съпротивлението R_x от напрежението U_x е:



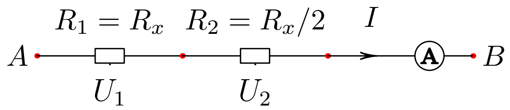
Фигура 1

$$R_x = \begin{cases} 3\ \Omega, & \text{ако } U_x \le 3\ \text{V}; \\ 6\ \Omega, & \text{ако } U_x > 3\ \text{V}. \end{cases}$$



Фигура 2

Представете показанията на амперметъра от Фигура 1 като функция на времето – таблично и графично. **(9,5 т.)** Приемете, че амперметърът е идеален. В кой момент от време мощността на тока през веригата е максимална. Пресметнете тази мощност. **(0,5 т.)**



Решение: 1. Два от елементите на Фиг. 1 са успоредно свързани, тоест напрежението върху тях ще е едно и също и те ще променят съпротивлението си едновременно. Тогава еквивалентната схема на Фиг. 1 ще е като на горната фигура, където с U_1 и U_2 са означени напреженията върху двата елемента – R_1 и R_2. Тъй като във всеки един момент от време t е изпълнен законът на Ом, тогава може да запишем $U_i = IR_i,\ i = 1, 2$. Освен това $U_1 + U_2 = U_{AB}$. От последните две равенства може да определим тока през амперметъра:

$$I(t) = U_{AB}(t)/(R_1 + R_2).\ \textbf{(0,8 т.)} \tag{1.1}$$

От графиката на Фигура 2 се вижда, че зависимостта на $U_{AB}(t)$ е:

$$U_{AB}(t) = \begin{cases} at, & \text{ако } t \in [0, 27]\ \text{s}; \\ b - at, & \text{ако } t \in (27, 54]\ \text{s}, \end{cases}$$

където $a = 1$ V/s, $b = 54$ V. **(0,2 т.)**

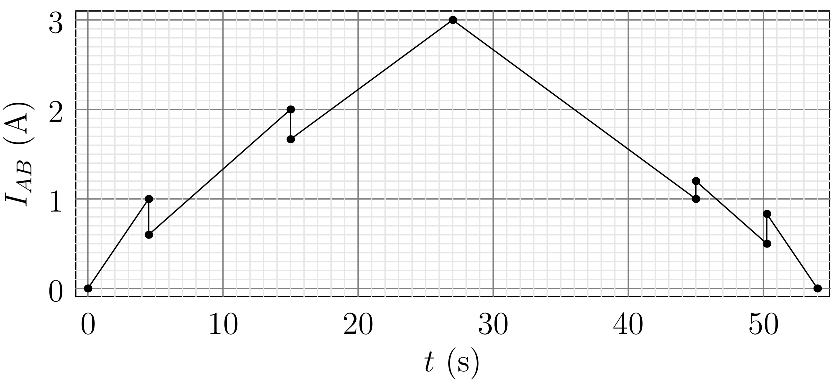
За да определим в кои моменти от време t елементите R_x си променят съпротивлението, ще използваме следната последователност: съобразяваме какво ще бъде напрежението върху елементите; определяме съпротивлението им; пресмятаме тока през амперметъра; намираме условието, от което може да се определи момента от време, в който съпротивлението се променя; пресмятаме съответното време. За нагледност ще запишем резултатите в таблица:

R_1 (Ω)	R_2 (Ω)	I_{AB} (A)	Условие, от което се определя t	t (s)
3	1.5	$2t/9$	$U_1 = IR_1 \leq 3$ V, 0 s $\leq t \leq 27$ s	4.5
6	1.5	$2t/15$	$U_2 = IR_2 \leq 3$ V, 4.5 s $\leq t \leq 27$ s	15
6	3	$t/9$	$U_1 > 3$ V, $U_2 > 3$ V, 15 s $\leq t \leq 27$ s	27
6	3	$(54-t)/9$	$U_2 = IR_2 \leq 3$ V, 27 s $\leq t \leq 54$ s	45
6	1.5	$2(54-t)/15$	$U_1 = IR_1 \leq 3$ V, 45 s $\leq t \leq 54$ s	50.25
3	1.5	$2(45-t)/9$	$U_1 \leq 3$ V, $U_2 \leq 3$ V, 50.25 s $\leq t \leq 54$ s	54

(4,5 т.)

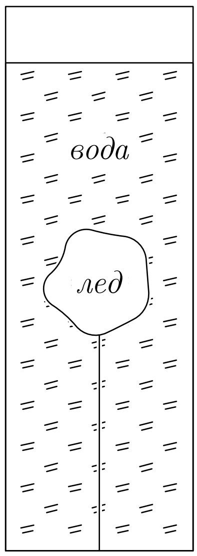
След като сме определили големината на тока и моментите от време, в които елементите сменят съпротивлението си, може да попълним таблицата за $I(t)$, **(2 т.)** както и да начертаем графиката: **(2 т.)**

t (s)	I_{AB} (A)
0	0
4.5	1
4.5	0.6
15	2
15	1.67
27	3
45	1
45	1.2
50.25	0.5
50.25	0.83
54	0



Мощността на тока се определя от израза $P = UI$. От дадената зависимост на $U(t)$ и от получената зависимост $I(t)$ се вижда, че P ще е максимална когато $t = 27$ s, **(0,25 т.)** а стойността ѝ ще е $P = 81$ W. **(0,25 т.)**

Задача 2. В топлоизолиран съд има вода с маса $m_{в} = 2$ kg и температура $t_0 = 0$ °C. В съда се поставя парче лед с маса $m_{л} = 500$ g и температура $t_1 = -10$ °C. Ледът е захванат за дъното на съда с нишка, както е показано на Фигура 1. С колко процента ще се измени масата на леда, когато в съда настъпи топлинно равновесие? **(2 т.)** След като настъпи топлинно равновесие, във водата се потапя нагревател с мощност $P = 500$ W. Колко минути трябва да е включен нагревателят, за се нагрее водата до температура $t_2 = 20$ °C. **(4 т.)** Определете силата на опън на нишката T, преди да бъде включен нагревателят, ако знаете, че в този момент височината на водата в съда е $h_1 = 25.6$ cm, а след като се изключи нагревателят, височината на водата е $h_2 = 25.0$ cm. Дъното на съда има площ $S = 100$ cm^2. **(4 т.)** Топлинните капацитети на съда и нагревателя, обемът на нагревателя, както и изпарението на водата и масата на въздуха над водата се пренебрегват. Да се приеме също така, че плътността на водата е постоянна и не зависи от температурата.



Фигура 1

Полезни константи: специфичен топлинен капацитет на леда – $c_{л} = 2.1$ kJ/kg.K, специфична топлина на топене на леда – $\lambda = 330$ kJ/kg, специфичен топлинен капацитет на водата – $c_в = 4.2$ kJ/kg.K, плътност на водата – $\rho_в = 1.0$ g/cm^3, земно ускорение – $g = 10$ m/s^2.

Решение: 2. След настъпване на топлинен баланс между водата и леда в съда ще има вода и лед при температура $t_0 = 0$ °C, като масата на леда ще е нараснала с Δm. Записваме уравнението на топлинния баланс, което ще има вида:

$$m_л c_л (t_0 - t_1) = \Delta m \lambda. \textbf{ (1 т.)}$$

Така определяме отношението $\dfrac{\Delta m}{m_л} = \dfrac{c_л}{\lambda}(t_0 - t_1) \approx 6.4\%$. **(1 т.)**

При включване на нагревателя, топлината, която той отделя, ще отиде за разтапяне на леда, който вече има маса $M_л = m_л + \Delta m = 532$ g и нагряване на вода с маса $M_в = m_л + m_в = 2.5$ kg от температура $t_0 = 0$ °C до $t_2 = 20$ °C. Този път уравнението на топлинния баланс има вида:

$$Pt = \lambda M_л + M_в c_в (t_2 - t_0). \textbf{ (3 т.)}$$

Откъдето определяме времето за нагряване $t = [\lambda M_л + M_в c_в (t_2 - t_0)]/P \approx 771$ s, $t \approx 13$ min. **(1 т.)**

За определяне на силата на опън на нишката T, ще използваме, че хидростатичното налягане на дъното на съда p се определя от височината на водата в него – h. Така преди да бъде включен нагревателя силата, която ще действа на дъното на съда, е $F = \rho_в g h_1 S - T$. **(2 т.)** След като нагревателя се включи и ледът се стопи, нивото на водата пада, но силата, действаща на дъното на съда остава същата или $F = \rho_в g h_2 S$. **(1 т.)** Като приравним десните страни на предните две равенства за силата на опън на нишката се получава $T = \rho_в g (h_1 - h_2) S = 0.6$ N. **(1 т.)**

Задача 3. Последният вагон на влак се намира на разстояние l от изхода на подлеза на перона. Пътник за същия влак излиза от подлеза, но забелязва, че влакът тръгва с постоянно ускорение a. С каква минимална скорост v_0 трябва да бяга човекът, за да догони влака? Колко време t_0 ще бяга човекът и на какво разстояние x_0 от изхода на подлеза ще хване влака? **(5 т.)** Нека влакът има маса m и мощност P. Каква ще е максималната скорост на влака, ако знаем, че над определена скорост v съпротивителната сила действаща на влака се дава с израза $f_с = \mu N + kv$, където μ и k са известни константи, а N е нормалната реакция на опората, действаща на влака? **(5 т.)**

Решение: 3. Нека за начало на координатната система изберем изхода на подлеза, а положителната посока на оста x да съвпада с посоката на ускорението на влака. В тази отправна система законите за движение на последния вагон на влака и човека имат следния вид:

$$\begin{aligned} x_в &= l + at^2/2, \\ x_ч &= vt. \end{aligned}$$

За да се качи на влака, човекът и последният вагон трябва да са на едно и също място $x_{\text{в}} = x_{\text{ч}}$, в някакъв момент от време t. **(2,5 т.)** Като приравним десните части на последните равенства получаваме квадратно уравнение за времето t, $at^2 - 2vt + 2l = 0$. Корените на това уравнение са $t_{1,2} = \dfrac{v}{a}\left(1 \pm \sqrt{1 - \dfrac{2al}{v^2}}\right)$. Те съответстват на $v > \sqrt{2al}$, ние търсим минималната скорост, която съответства на решение $t_0 = v_0/a$, което се определя от условието $v = \sqrt{2al} = v_0$. След като вече сме намерили минималната скорост и времето на движение, тогава лесно може да пресметнем $x_0 = 2l$. **(2,5 т.)**

При достигане на максимална скорост, ускорението на влака ще е нула, тоест силата създавана от двигателя на влака F ще се изравни със съпротивителната сила f_{c}. Тогава може да запишем, че $P = Fv_{\max} = (\mu N + kv_{\max})v_{\max} = \mu mgv_{\max} + kv_{\max}^2$. **(3 т.)** Прехвърляме всичко от едната страна на равенството и получаваме квадратно уравнение за скоростта $v_{\max}$. В случая физичен смисъл има само решението

$$v_{\max} = \frac{\mu mg}{2k}\left[\sqrt{1 + \frac{4kP}{(\mu mg)^2}} - 1\right].$$ **(2 т.)**