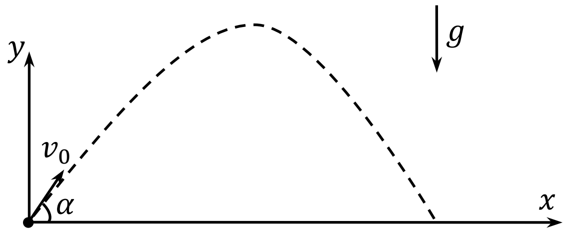
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
1 – 3 ноември 2018 г., Сандански
Решения на темата за 11.-12. клас (пета състезателна група)

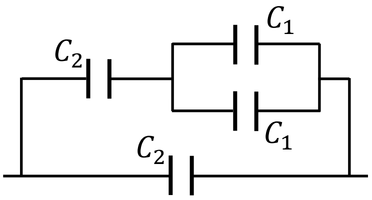
Задача 1. Снежни топки (двете части на задачата са независими)



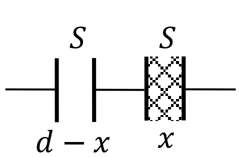
Част А В координатната система на фигурата вляво законът за движение на снежната топка е: $x(t) = v_0 \cos\alpha\, t$, $y(t) = v_0 \sin\alpha\, t - \frac{gt^2}{2}$, където t е изминалото време от хвърлянето на топката. **[1 т.]** Максималната височина на издигане се определя от условието за нулиране на скоростта по y: $v_0 \sin\alpha - g t_{y\max} = 0$, откъдето след заместване в закона за движение по y следва, че $y_{\max} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}$. **[1 т.]** Разстоянието $x_{\max}$ от точката на хвърляне до мястото на падане на топката се определя от условието $y(t_{x\max}) = 0$, след което се замести полученото $t_{x\max} = \frac{2v_0 \sin\alpha}{g}$ в закона за движение по x: $x_{\max} = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. **[1 т.]** След като приравним $x_{\max} = y_{\max}$, получаваме, че $\tan\alpha = 4$, т.е. $\alpha \approx 76^{\circ}$. **[1 т.]**

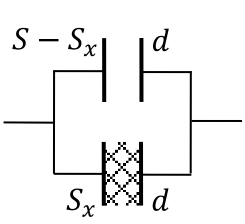
Част Б Ще използваме координатна система като в **Част А**. Законът за движение на топката е: $x_{\text{т}}(t) = v_0 t$, $y_{\text{т}}(t) = -\frac{gt^2}{2}$, където t е изминалото време от хвърлянето на топката. **[1 т.]** Законът за движение на Георги е: $x_{\Gamma}(t) = (L + ut)\cos\beta$, $y_{\Gamma}(t) = -(L + ut)\sin\beta$. **[1 т.]** За да може снежната топка да уцели Георги, трябва $x_{\text{т}}(t') = x_{\Gamma}(t')$ и $y_{\text{т}}(t') = y_{\Gamma}(t')$. **[0,5 т.]** Оттук $v_0 t' = (L + ut')\cos\beta$ и $-\frac{gt'^2}{2} = -(L + ut')\sin\beta$. **[0,5 т.]** От второто уравнение следва, че търсеното време на полет $t' = \frac{u \sin\beta + \sqrt{u^2 \sin^2\beta + 2gL \sin\beta}}{g} \approx 1{,}5$ s. **[2 т.]** Съответно получаваме, че търсената начална скорост е $v_0 = \frac{(L + ut')\cos\beta}{t'} = u\cos\beta + \frac{gL\cos\beta}{u \sin\beta + \sqrt{u^2 \sin^2\beta + 2gL \sin\beta}} = \frac{1}{2}\left(u\cos\beta + \operatorname{ctg}\beta \sqrt{u^2 \sin^2\beta + 2gL\sin\beta}\right) \approx 13$ m/s. **[1 т.]**

Задача 2. Кондензатори (двете части на задачата са независими)



Част А Еквивалентната схема на свързване е дадена на фигурата вляво. **[1,5 т.]** Капацитетът между краищата на веригата е $C = C_2 + \frac{2C_1 C_2}{2C_1 + C_2} = 3$ mF. **[1,5 т.]**



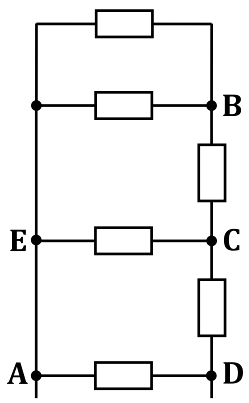


Част Б а) Преди отстраняването на преградата кондензаторът може да се представи като система от два последователно свързани кондензатора, както е показано на по-горната фигура вляво. **[0,5 т.]** Капацитетът в този случай е $C_I = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon d - (\varepsilon - 1)x}$. **[1 т.]** След като преградата е махната, кондензаторът е еквивалентен на системата от два успоредно свързани кондензатора, която е показана на по-долната фигура вляво. **[0,5 т.]** Площта S_x на частта от електродите, която е залята от диелектричната течност, се получава от условието за запазване на обема на диелектрика: $xS = dS_x$. **[0,5 т.]** Капацитетът придобива вида

$C_{II} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\left(1 + \frac{(\varepsilon-1)x}{d}\right)$. **[0,5 т.]** Дадено е, че $C_{II} = 2C_I$. Получаваме, че $\frac{\varepsilon_0 S}{d}\left(1 + \frac{(\varepsilon-1)x}{d}\right) = \frac{2\varepsilon\varepsilon_0 S}{\varepsilon d-(\varepsilon-1)x}$. Оттук следва квадратно уравнение за x от вида $(\varepsilon-1)^2x^2 - (\varepsilon-1)^2dx + \varepsilon d^2 = 0$. **[0,5 т.]** Т.е. $x = \frac{\varepsilon-1\pm\sqrt{(\varepsilon-1)^2-4\varepsilon}}{2(\varepsilon-1)}d = \frac{5\pm1}{10}d$. **[1 т.]** Като наложим изискването, че $x < d/2$, получаваме $x = \frac{2d}{5} = 2$ mm. **[0,5 т.]**

б) За така намереното x в предното подусловие капацитетът на кондензатора е $C_{II} = \frac{\varepsilon_0 S}{d}\left(1 + \frac{(\varepsilon-1)x}{d}\right) = \frac{\varepsilon_0 S}{2d}\left(\varepsilon + 1 - \sqrt{(\varepsilon-1)^2 - 4\varepsilon}\right)$. **[0,5 т.]** Зарядът на кондензатора е $q = C_{II}U = \frac{\varepsilon_0 SU}{2d}\left(\varepsilon + 1 - \sqrt{(\varepsilon-1)^2 - 4\varepsilon}\right) \approx 0{,}19$ μC. **[0,5 т.]** Електричната енергия на кондензатора е $W = \frac{C_{II}U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 SU^2}{4d}\left(\varepsilon + 1 - \sqrt{(\varepsilon-1)^2 - 4\varepsilon}\right) \approx 3{,}4$ μJ. **[1 т.]**

Задача 3. Електрическа верига



а) Еквивалентна схема на дадената електрическа верига е представена на фигурата вляво. **[1 т.]** Съпротивлението, което ще се измери между точките **A** и **D**, е равно на $R_{\mathbf{AD}} = \frac{8R}{13}$. **[3 т.]**

б) След свързването на батерията към веригата общото еквивалентно съпротивление ще стане $R_{\text{екв}} = R_{\mathbf{AD}} + r = \frac{8R}{13} + r$. **[0,5 т.]** Съответно токът през батерията ще бъде $I = \mathcal{E}/R_{\text{екв}} = \mathcal{E}/\left(\frac{8R}{13} + r\right)$. **[0,5 т.]** Оттук напрежението между точките **A** и **D** ще бъде $U_{\mathbf{AD}} = \mathcal{E} - Ir = \frac{8R\mathcal{E}}{8R+13r}$. **[1 т.]** През резистора между точките **C** и **D** ще тече ток $I_{\mathbf{CD}} = \frac{5U_{\mathbf{AD}}}{8R} = \frac{5\mathcal{E}}{8R+13r}$. **[1 т.]** Следователно напрежението между точките **C** и **E** ще бъде $U_{\mathbf{CE}} = U_{\mathbf{AD}} - I_{\mathbf{CD}}R = \frac{3R\mathcal{E}}{8R+13r}$. **[1 т.]** Окончателно, през резистора между точките **B** и **C** ще тече ток $I_{\mathbf{BC}} = \frac{2U_{\mathbf{CE}}}{3R} = \frac{2\mathcal{E}}{8R+13r}$. **[1 т.]**

в) Мощността, която се отделя в резисторите, е $P = I^2R_{\mathbf{AD}} = \frac{104R\mathcal{E}^2}{(8R+13r)^2}$. **[1 т.]**