МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЕСЕННО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
17 - 19 ноември 2017 г., Варна
Решения на задачите от специалната тема (шеста състезателна група)

Задача 1. Космонавти и космически кораб.

По-долу в числените резултати умишлено е дадена навсякъде една значеща цифра повече, за да не се натрупва числова грешка от закръгляване.

а) Скоростта v на кораба се намира от условието за движение по окръжност: $\frac{m_k v^2}{r} = \frac{GMm_k}{r^2}$, откъдето $v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$ **[0.6 т.]** (1.1) $\approx$ 7652 m/s. **[0.4 т.]**

б) Периодът T на обикаляне на кораба около планетата е $T = \frac{2\pi r}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}}$ (1.2) **[0.3 т.]** $\approx$ 5583 s. **[0.2 т.]**

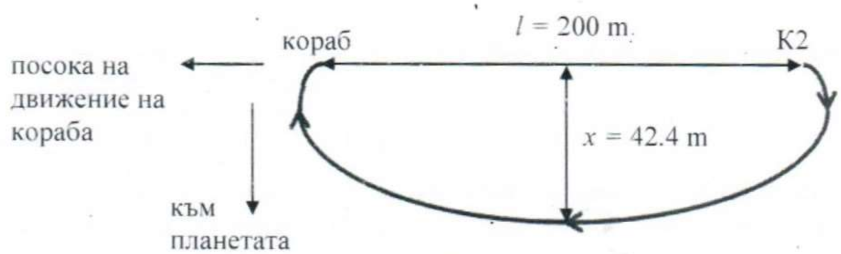
в) Желаната от К2 разлика $\Delta T = T - T_m$ в периодите на обикаляне на кораба и К2 е $\Delta T = \frac{l}{2\pi r}T = l\sqrt{\frac{r}{GM}}$ (1.3) **[0.3 т.]** $\approx$ 0,02614 s. **[0.2 т.]**

г) Разликата x между диаметъра на орбитата на кораба и голямата ос на орбитата на К2 може да се намери от третия закон на Кеплер: $\frac{T^2}{r^3} = \frac{T_m{}^2}{\left(r-\frac{x}{2}\right)^3}$ **[0.4 т.]**, откъдето $= T_m\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{3}{2}} \approx T_m\left(1+\frac{3x}{4r}\right)$. **[0.4 т.]** (1.4) $\Delta T = T_m\frac{3x}{4r} \approx T\frac{3x}{4r}$, откъдето използвайки (1.3), $x = \frac{4r}{3}\frac{\Delta T}{T} = \frac{2l}{3\pi}$ (1.5) **[0.4 т.]** = 42,44 m. **[0.3 т.]**

д) Относителната скорост Δv_m на К2 спрямо кораба, веднага след като е хвърлил предмета, е $\Delta v_m = v - v_m$, където v е скоростта на кораба, а v_m е скоростта на К2 веднага след като е хвърлил предмета. Тя може да се намери от данните за траекторията на К2. Нека разстоянието до центъра на планетата в най-близката точка от траекторията на К2 е r', а скоростта там е v_m'. От закона за запазване на енергията следва $\frac{mv_m{}^2}{2} - \frac{GMm}{r} = \frac{mv_m'^2}{2} - \frac{GMm}{r'}$ (1.6) **[0.2 т.]**. От закона за запазване на момента на импулса следва $mv_m r = mv_m' r'$ (1.7) **[0.2 т.]**. Преобразуваме (1.6) до $v_m'^2 - v_m{}^2 = 2GM\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right)$ (1.8). Заместваме отношението $\frac{v_m'}{v_m}$ от (1.7) в (1.8): $\left[\left(\frac{v_m'}{v_m}\right)^2 - 1\right]v_m{}^2 = \left[\left(\frac{r}{r'}\right)^2 - 1\right]v_m{}^2 = 2GM\left(\frac{1}{r'} - \frac{1}{r}\right) = 2GM\frac{r-r'}{r'r}$. След съкращения се получава $v_m = \sqrt{\frac{2GMr'}{(r+r')r}}$ (1.9) **[1 т.]**. Тъй като $r' = r - x$, замествайки в (1.9), $v_m = \sqrt{\frac{2GM(r-x)}{(r+r-x)r}} = \sqrt{\frac{GM}{r}}\left(1-\frac{x}{r}\right)^{\frac{1}{2}}\left(1-\frac{x}{2r}\right)^{-\frac{1}{2}} \approx \sqrt{\frac{GM}{r}}\left(1-\frac{x}{4r}\right) = v\left(1-\frac{x}{4r}\right)$ (1.10) **[1 т.]**. Следователно $\Delta v_m = \frac{vx}{4r} = \frac{vl}{6\pi r}$ (1.11). **[0.4 т.]** = 1,194.10^{-2} m/s. **[0.2 т.]**

е) Прилагаме закона за запазване на импулса за системата от тела космонавт К2-хвърлено тяло в система, свързана с кораба: $0 = (m-\mu)\Delta v_m - \mu(v_\mu - \Delta v_m)$, откъдето $v_\mu = \Delta v_m\frac{m}{\mu}$ **[0.3 т.]** = 11,94 m/s **[0.2 т.]**

ж) Траекторията на К2 до достигането си до кораба (в система, свързана с кораба) е дадена по-долу. **[1 т.]**

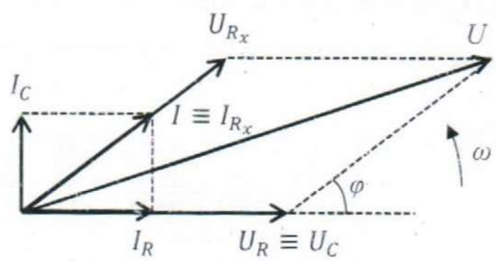


з) Тъй като системата, свързана с кораба, е въртяща се отправна система, при разглеждане на движение на тела спрямо нея, трябва да се отчита допълнително действащата на телата Кориолисова сила (центробежната и гравитационната сили (между телата и планетата) са равни по големина и противоположни по посока). Следователно едно тяло в тази неинерциална система ще се движи само под действието на Кориолисовата сила. Тъй като малкото тяло е хвърлено със сравнително голяма скорост и ни интересува движението на близко разстояние (~ l), то неговата траектория малко ще се отклонява от правата линия. Тъй като $\vec{F}_K = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega}$ и първоначално скоростта $\vec{v}$ на тялото е тангенциална на кръговата орбита, а $\vec{\Omega}$ е перпендикулярна на равнината на орбитата, то $\vec{v}$ и $\vec{\Omega}$ са перпендикулярни и силата е насочена радиално навън. Можем да приемем, че тя слабо променя тангенциалната скорост, а само добавя малка радиална скорост. Тогава, ако t е времето за достигане на малкото тяло до кораба, то $t = \frac{l}{v_\mu}$, а радиалното отместване $\Delta r = \frac{1}{2}a_K t^2 = \frac{\Omega l^2}{v_\mu} = \frac{2\pi l^2}{T v_\mu}$ **[1.5 т.]** = 3,77 m. Достигайки кораба, малкото тяло ще се е отклонило доста от целта и К1 няма да може да го хване. **[0.5 т]**

<u>Задача 2.</u> Черна кутия с резистор и кондензатор.

а) Формулата за импеданса Z на веригата, изразен чрез R, C, R_x и кръговата честота $\omega = 2\pi\nu$, може да се получи по 2 метода:

I метод (използвайки векторни диаграми) Използва се факта, че моментните стойности на величините в една променливотокова верига са проекциите върху предварително избрана от нас ос на въртящи се с ъглова скорост $\omega = 2\pi\nu$ вектори. Токовете и напреженията върху отделните елементи на веригата са дадени на фигурата.



Токовете през резисторите и напреженията върху тях са във фаза, докато токът I_C през кондензатора изпреварва с фаза $\frac{\pi}{2}$ напрежението U_C върху него. От чертежа се вижда, че $I = \sqrt{{I_C}^2 + {I_R}^2} = \sqrt{\frac{{U_C}^2}{(1/\omega C)^2} + \frac{{U_R}^2}{R^2}} = U_R\sqrt{\frac{1}{(1/\omega C)^2} + \frac{1}{R^2}}$ **[0.2 т.]** (2.1) и $U^2 = {U_R}^2 + {U_{R_x}}^2 - 2U_R U_{R_x}\cos(\pi - \varphi) = {U_R}^2 + {U_{R_x}}^2 + 2U_R U_{R_x}\cos\varphi$. **[0.2 т.]** (2.2) Освен това $U_{R_x} = R_x I$ **[0.1 т.]** (2.3), $U = ZI$ **[0.1 т.]** (2.4) и $\cos\varphi = \frac{I_R}{I} = \frac{\frac{U_R}{R}}{U_R\sqrt{\frac{1}{(1/\omega C)^2}+\frac{1}{R^2}}} = \frac{1}{R\sqrt{\frac{1}{(1/\omega C)^2}+\frac{1}{R^2}}}$ **[0.2 т.]** (2.5). Замествайки (2.1), (2.3), (2.4) и (2.5) в (2.2), се получава $Z^2 I^2 = \frac{I^2}{\frac{1}{(1/\omega C)^2}+\frac{1}{R^2}} +$

$R_x{}^2I^2 + 2\frac{I}{\sqrt{\frac{1}{(1/\omega C)^2}+\frac{1}{R^2}}}R_xI\frac{1}{R\sqrt{\frac{1}{(1/\omega C)^2}+\frac{1}{R^2}}}$ **[0.2 т.]** (2.6). След съкращения, кореннуване и опростяване, $Z = \sqrt{R_x{}^2 + \frac{R^2+2RR_x}{1+(\omega CR)^2}}$. **[3 т.]** (2.7)

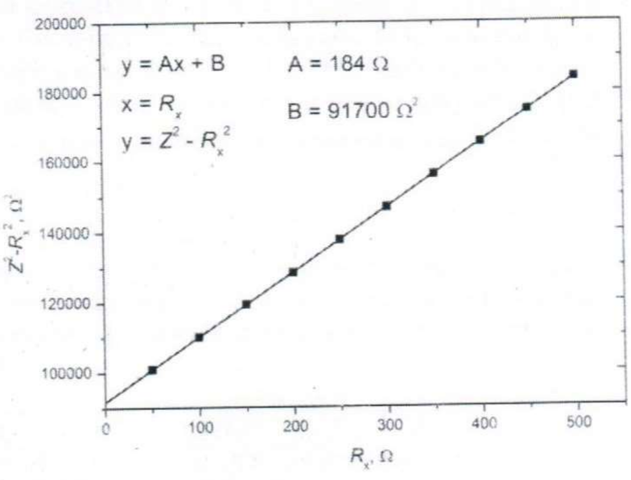
II метод (използвайки комплексни числа) Използва се факта, че импедансът на схемата може да се пресмята по правилата за постояннотокови вериги, като се приеме, че съпротивлението на кондензатора е имагинерно число ($Z_C = \frac{1}{i\omega C}$), а импедансът Z на веригата е модулът на комплексния импеданс $\hat{Z}$, получен в резултат на пресмятанията. Така, комплексният импеданс е $\hat{Z} = R_x + \frac{R.\frac{1}{i\omega C}}{R+\frac{1}{i\omega C}}$ **[0.4 т.]** $= \frac{R_x+R+i\omega CRR_x}{1+i\omega CR} = \frac{(R_x+R+i\omega CRR_x)}{(1+i\omega CR)}.\frac{(1-i\omega CR)}{(1-i\omega CR)} = \frac{R_x+R+(\omega CR)^2R_x-i\omega CR^2}{1+(\omega CR)^2}$ **[0.6 т.]**. След опростяване, за модула на комплексния импеданс се получава $|\hat{Z}| = \sqrt{\hat{Z}\hat{Z}^*} = \frac{\sqrt{[R_x+R+(\omega CR)^2R_x]^2+(\omega CR^2)^2}}{1+(\omega CR)^2}$ $= \sqrt{R_x{}^2 + \frac{R^2+2RR_x}{1+(\omega CR)^2}}$ **[3 т.]**. (2.7)

б) Токът I и импедансът Z се пресмятат по формулите $I = \frac{U}{R_x}$ и $Z = \frac{U_{eff}}{I} = \frac{U_{eff}}{U}R_x$. **[0.2 т.]** Таблицата с добавените нови колони за стойностите на тока I във веригата и импеданса Z на веригата изглежда така (виж по-долу). **[0.8 т.]**

в) Формулата за импеданса на веригата (2.7) може да се преобразува до $Z^2 - R_x{}^2 = \frac{2R}{1+(\omega CR)^2}R_x + \frac{R^2}{1+(\omega CR)^2}$, т.е. при променливи $y = Z^2 - R_x{}^2$ и $x = R_x$, зависимостта $y = f(x)$ е линейна: $y = Ax + B$, където параметрите A и B на линейната зависимост зависят от неизвестните R и C: $A = \frac{2R}{1+(\omega CR)^2}$ (2.8), $B = \frac{R^2}{1+(\omega CR)^2}$ (2.9) **[0.4 т.]** В таблицата по-долу е добавена колона за новата променлива y и са изчислени нейните стойности. **[0.6 т.]**

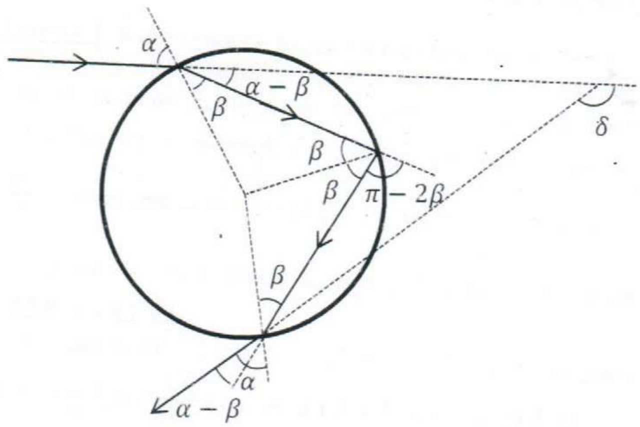
г) Данните са начертани на графиката по-долу. **[1 т.]** От нея са определени коефициентите $A \approx 184\ \Omega$ **[0.5 т.]** и $B \approx 91\ 700\ \Omega^2$ **[0.5 т.]**. Решавайки (2.8) и (2.9) спрямо R и C, се получава: $R = \frac{2B}{A}$ **[0.5 т.]**, $C = \frac{\sqrt{4B-A^2}}{2\omega B}$ **[0.5 т.]**. Замествайки с получените стойности за A и B, $R \approx 997\ \Omega$ **[0.5 т.]** и $C \approx 10{,}0\ \mu F$ **[0.5 т.]**.

R_x, Ω	U, V	I, A	Z, Ω	$y = Z^2 - R_x{}^2$, Ω^2
50.0	34.2	0.6840	321.6	100927
100.0	63.5	0.6350	346.5	110062
150.0	87.6	0.5840	376.7	119403
200.0	107.2	0.5360	410.4	128428
250.0	122.9	0.4916	447.5	137756
300.0	135.6	0.4520	486.7	146877
350.0	145.9	0.4169	527.8	156073
400.0	154.3	0.3858	570.3	165242
450.0	161.2	0.3582	614.1	174619
500.0	167.0	0.3340	658.7	183886



<u>Задача 3.</u> Небесна дъга.

а) Ъгълът на отклонение се пресмята, като се сумират последователно ъглите на отклонение при първото пречупване при влизане на лъча в капката, k на брой вътрешни отражения и при второто пречупване при излизане на лъча от капката: $\delta = (\alpha - \beta) + k(\pi - 2\beta) + (\alpha - \beta) = k\pi + 2\alpha - 2(k+1)\beta$ (виж чертежа при $k = 1$). **[1 т.]**



Тъй като $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n$ **[0.5 т.]**, то $\delta = k\pi + 2\alpha - 2(k+1).\arcsin\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)$ **[0.5 т.]**.

б) Екстремум ще има при $\frac{d\delta}{d\alpha} = 0$, следователно $\frac{d\delta}{d\alpha} = 2 - 2(k+1)\frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\sin\alpha}{n}\right)^2}}\frac{1}{n}\cos\alpha = 0$ **[1 т.]**, откъдето $\sin\alpha_д = \sqrt{\frac{(k+1)^2-n^2}{(k+1)^2-1}}$. **[1.5 т.]**

в) Изчислените ъгли са дадени в таблицата по-долу:

k	λ, nm	n	$\alpha_д$, °	$\beta_д$, °	$\delta_д$, °	$\varphi_д$, °
1	400	1.344	58.77	39.51	139.50	40.50
	550	1.334	59.35	40.16	138.06	41.94
	700	1.331	59.53	40.36	137.62	42.38
2	400	1.344	71.49	44.87	233.76	53.76
	550	1.334	71.81	45.41	231.16	51.16
	700	1.331	71.91	45.58	230.34	50.34

Схемата трябва да съдържа двете дъги. Първата е вътрешна с виолетовия цвят отвътре и червения отвън. Втората е външна, с обърнати цветове и почти два пъти по-широка. **[2.5 т.]**

г) Тъй като всички лъчи (паднали, пречупени и вътрешно отразени) лежат в една равнина, то ако пада линейно-поляризиран лъч с успоредна (или перпендикулярна) поляризация, тя остава такава и за всяко следващо отражение (пречупване). Освен това, тъй като дадените формули (на Френел) са симетрични относно размяната на ъглите α и β, то коефициентът на отражение при влизането на лъча, при вътрешното отражение и при излизането на лъча е един и същ. Следователно, ако пада лъч с интензивност I_0, то излезлият от капката лъч ще има интензивност $I_и = (1-R)^2 R^k I_0$, като коефициентът на отражение R е различен за двете поляризации (успоредна и перпендикулярна). **[0.5 т.]** Степента на поляризация е свързана с коефициентите на отражение така: $P = \frac{I_{и\parallel} - I_{и\perp}}{I_{и\parallel} + I_{и\perp}}$ при $I_{и\parallel} > I_{и\perp}$ или $P = \frac{I_{и\perp} - I_{и\parallel}}{I_{и\perp} + I_{и\parallel}}$, ако $I_{и\parallel} < I_{и\perp}$. **[0.5 т.]**

Изчислените стойности на търсените величини са дадени в таблицата по-долу. Светлината от дъгите е силно линейно-поляризирана, и за двете дъги в направление, тангенциално на дъгите, като светлината от първата дъга е с по-голяма степен на поляризация от тази на втората. **[2 т.]**

k	λ, nm	n	$\alpha_д$, °	$\beta_д$, °	$R_\parallel$	$R_\perp$	$I_{и\parallel}/I_0$	$I_{и\perp}/I_0$	P_k
1	550	1.334	59.35	40.16	0.00340	0.1111	0.00337	0.08778	0.926
2	550	1.334	71.81	45.41	0.06520	0.2500	0.00371	0.03516	0.809