

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

17 - 19 ноември 2017 г., Варна

Специална тема (шеста състезателна група)

Задача 1. Космонавти и космически кораб.

Космически кораб (който всъщност е малка космическа капсула с размер $d \sim 4$ m) с двама космонавти се движи по кръгова орбита с радиус r около планета с маса M . И двамата космонавти са излезли от капсулата като единият (K1) е закрепен неподвижно за нея от външната ѝ страна, а другият (K2 с маса m) е също неподвижен спрямо капсулата, но на разстояние l от нея ($d \ll l \ll r$), като се движи по същата орбита зад нея (скоростта на космонавта K2 спрямо планетата е насочена към капсулата). Изведнъж K2 установява, че въжето, с което е бил свързан с капсулата, се е разкачило и K1 няма как да го издърпа обратно до капсулата. След като помислил, K2 решил да се завърне на капсулата по следния начин: Той изхвърлил малък предмет с маса μ ($\mu \ll m$) със скорост v_μ , насочена точно към капсулата (като направлението на скоростта v_μ минава през центъра на масата на K2). Той съобразил, че по този начин така ще си промени скоростта, че ще се движи по орбита с малко по-малка голяма ос и съответно малко по-малък период. При подходящо подбрана нова орбита, точно след един период на въртене на K2, корабът щял да се намира в същата точка от пространството (т.е. така ще се завърне на кораба). Трябва да получите формула и стойност за скоростта v_μ . За целта получите последователно формули и стойности за следните величини:

- а) скоростта v на кораба. $M = 5,97 \cdot 10^{24}$ kg, $r = 6800$ km; [1 т.]
- б) периода T на обикаляне на кораба около планетата; [0.5 т.]
- в) желаната от K2 разлика $\Delta T = T - T_m$ в периодите на обикаляне на кораба и K2; $l = 200$ m; [0.5 т.]
- г) разликата x между диаметъра на орбитата на кораба и голямата ос на орбитата на K2; [1.5 т.]
- д) относителната скорост Δv_m на K2 спрямо кораба, веднага след като е хвърлил предмета; [3 т.]
- е) скоростта v_μ на хвърляне на малкото тяло, за да постигне K2 относителна скорост Δv_m спрямо кораба; $\mu = 0,100$ kg, а $m = 100$ kg; [0.5 т.]
- ж) Начертайте качествено траекторията на K2 до достигането му до кораба (в система, свързана с кораба). Отбележете параметрите на траекторията, които знаете. [1 т.]
- з) Ако K2 се е прицелил перфектно и е хвърлил малкото тяло точно към кораба и K1, ще може ли K1 да го хване (за да не правят космически боклук ☺)? Обосновете отговора си количествено, използвайки възможно най-простия модел. [2 т.]

Задача 2. Черна кутия с резистор и кондензатор.

Черна кутия съдържа успоредно свързани резистор с неизвестно съпротивление R и кондензатор с неизвестен капацитет C . Към тази черна кутия последователно е включен друг резистор, чието съпротивление R_x е известно и може да се регулира. Така образуваната верига е включена към източник на променливо напрежение с ефективна стойност U_{eff} и честота ν (виж фигурата).

- а) Получете формула за импеданса Z на веригата, изразен чрез R , C , R_x и кръговата честота $\omega = 2\pi\nu$. [4 т.]

За да се намерят експериментално неизвестните стойности на двата елемента в черната кутия, са направени измервания. Използван е източник с ефективна стойност на напрежението $U_{eff} = 220$ V и честота $\nu = 50$ Hz.

С волтметър с много голямо вътрешно съпротивление се измерва напрежението U върху външния за черната кутия резистор R_x . При различни негови стойности са получени следните стойности за U (виж таблицата).

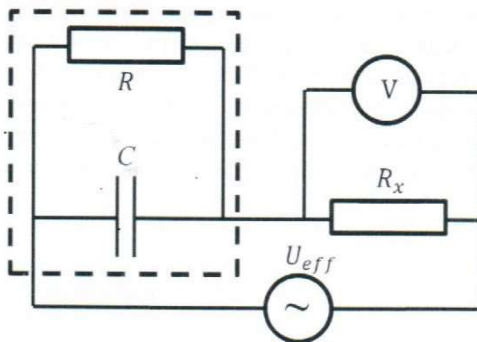
б) В листовите за отговори има празна таблица, в която са прехвърлени дадените данни за съпротивлението R_x и напрежението U . Добавете нови колони за стойностите на тока I във веригата и импеданса Z на веригата.

R_x, Ω	U, V
50.0	34.2
100.0	63.5
150.0	87.6
200.0	107.2
250.0	122.9
300.0	135.6
350.0	145.9
400.0	154.3
450.0	161.2
500.0	167.0

Изчислете техните стойности. [1 т.]

в) Получената формула за импеданса Z на веригата преобразувайте в такива променливи, че лесно да се обработва графично (в тези променливи зависимостта да е линейна). Направете колони за новите променливи и изчислете техните стойности. [1 т.]

г) Начертайте данните на дадената милиметрова (графична) хартия и от параметрите на получената зависимост изчислете неизвестните стойности на съпротивлението R и капацитета C . [4 т.]



Задача 3. Небесна дъга.

След дъжд, когато в небето все още има дъждовни капки, а слънцето вече ги огрява, се наблюдава небесна дъга. Явлението се състои в наблюдаването на цветни дъги от концентрични окръжности. Ъгловият радиус на дадена дъга се дефинира като ъгълът φ , който сключват пристигащия от дъгата към наблюдателя светлинен лъч и направлението от наблюдателя към центъра на окръжността на дъгата ($\varphi \in (0, \frac{\pi}{2})$). Оказва се, че това явление (неговите параметри, като ъглови радиуси на наблюдаваните дъги, тяхното ъглово разпределение по цветове и поляризацията на наблюдаваната светлина) задоволително се обяснява на езика на геометричната оптика, изследвайки как светлинен лъч преминава през водна капка със сферична форма.

а) Нека ъгълът на падане на лъч върху повърхността на капка (кълбо) е α , ъгълът на пречупване е β , а ъгълът на отклонение на светлинния лъч (дължащо се на пречупване на лъча при влизане, на k на брой вътрешни отражения и на второто пречупване при излизане на лъча от капката) е δ ($\delta \in (0, \infty)$). Показателят на пречупване на водата е n , а на въздуха може да се приеме за единица. Получете формула за $\delta = \delta(\alpha, k, n)$. [2 т.]

б) Оказва се, че функцията $\delta = \delta(\alpha)$ (при k, n – фиксирани параметри) има екстремум при дадено α_d . Знаейки стойността на α_d , може да се пресметнат съответно β_d , δ_d и φ_d . φ_d съответства на ъгловия радиус на наблюдаваната дъга. Получете формула за $\sin \alpha_d = f(k, n)$. [2.5 т.]

в) Показателят на пречупване n на водата за някои дължини на вълни (за средата и двата края на видимия диапазон) е даден в таблицата. Изчислете α_d , β_d , δ_d и φ_d (в градуси) за дадените три дължини на вълните и за $k = 1$ (първа дъга) и $k = 2$ (втора дъга). Нарисувайте схематично двете дъги с разпределението на цветовете в тях и отбележете ъгловите им радиуси. [2.5 т.]

λ, nm	n	цвет
400	1.344	виолетов
550	1.334	жълт
700	1.331	червен

г) Слънчевата светлина, която осветява водните капки, е неполяризирана. Светлината, идваща от дъгите, обаче, се оказва частично поляризирана. Частично поляризираната

светлина количествено се описва с числото $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ (P се нарича степен на поляризация), където $I_{\max}$ и $I_{\min}$ са съответно максималната и минималната стойност на интензивността на светлината, която преминава през поляризатор, който последователно е завъртян на всички възможни ъгли в равнината, перпендикулярна на изследвания лъч. Изчислете степента на поляризация P_1 и P_2 за жълтата светлина, идваща съответно от първата и втората дъга. Добавете със стрелкички на схемата от подусловие в) направлението на доминиращата поляризация на светлината от дъгите. [3 т.]

Полезна теория, математика и фундаментални константи:

Гравитационна константа $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{kg}^2$

$(1 + x)^n \approx 1 + nx$, за $|x| \ll 1$

Когато тяло с маса m се движи със скорост $\vec{v}$ спрямо една неинерциална отправна система, въртяща се с ъглова скорост $\vec{\Omega}$, на тялото действа допълнителна инерчна сила, наречена Кориолисова: $\vec{F}_K = 2m\vec{v} \times \vec{\Omega}$

Косинусова теорема: В триъгълник със страни a, b, c и ъгли срещу тези страни α, β, γ , е изпълнено равенството $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$

Първата производна на обратната тригонометрична функция $\arcsin(x) \equiv \sin^{-1}(x)$ е $\frac{d}{dx} [\arcsin(x)] = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

При падане на светлинен лъч на границата на два прозрачни (непоглъщащи) диелектрика, част от него се отразява, а част от него се пречупва. Нека ъгълът на падане е α , а ъгълът на пречупване е β . Нека интензивността на падащия лъч е I_i , на отразения е I_r , а на преминалия е I_t . Тогава $I_i = I_r + I_t$. Нека коефициентът на отражение е $R = \frac{I_r}{I_i}$. Ако падащата светлина е линейно поляризирана в равнината на

падане (определена от падащия лъч и нормалата към повърхността), то $R_{\parallel} = \left[\frac{\tan(\alpha - \beta)}{\tan(\alpha + \beta)} \right]^2$.

Ако падащата светлина е линейно поляризирана в направление, перпендикулярно на равнината на падане, то $R_{\perp} = \left[\frac{\sin(\alpha - \beta)}{\sin(\alpha + \beta)} \right]^2$.

При отражение и пречупване неполяризираната светлина количествено може да се опише (държи се) като два линейно поляризирани снопа светлина с равни интензивности и поляризирани в две взаимно перпендикулярни направления.

Таблицы за отговори:

Задача	Търсена величина	Получена формула	Стойност и единици	Точки
1а	скорост v на кораба			[1.0 т.]
1б	период T на обикаляне на кораба около планетата			[0.5 т.]
1в	разлика $\Delta T = T - T_m$ в периодите на обикаляне на кораба и К2			[0.5 т.]
1г	разлика x между диаметъра на орбитата на кораба и голямата ос на орбитата на К2			[1.5 т.]
1д	относителната скорост Δv_m на К2 спрямо кораба			[3.0 т.]
1е	скоростта v_μ на хвърляне на малкото тяло			[0.5 т.]
1ж	качествен чертеж на траекторията на К2			[1.0 т.]
1з	количествено обоснован отговор			[2.0 т.]

Задача	Търсена величина	Получена формула	Точки
2а	импеданс Z на веригата		[4 т.]
2б	изчислени стойности на тока I във веригата и импеданса Z на веригата	в отделна таблица (на следващия лист)	[1 т.]
2в	нови променливи		[1 т.]
2г	стойности на съпротивлението R и капацитета C		[4 т.]

Задача	Търсена величина	Получена формула						Точки
3а	формула за $\delta = \delta(\alpha, k, n)$							[2.0 т.]
3б	формула за $\sin \alpha_d = f(k, n)$							[2.5 т.]
3в	изчислени стойности	k	$\lambda, \text{ nm}$	$\alpha_d, ^\circ$	$\beta_d, ^\circ$	$\delta_d, ^\circ$	$\varphi_d, ^\circ$	[2.5 т.]
		1	400					
			550					
			700					
		2	400					
			550					
			700					
	схема							
3г	степен на поляризация P_1 и P_2 за жълтата светлина	$P_1 =$ $P_2 =$						[3 т.]

Таблица за задача 2б

R_x, Ω	U, V						
50.0	34.2						
100.0	63.5						
150.0	87.6						
200.0	107.2						
250.0	122.9						
300.0	135.6						
350.0	145.9						
400.0	154.3						
450.0	161.2						
500.0	167.0						