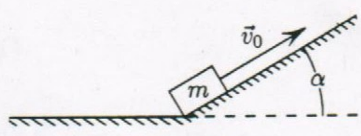
3бр.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
17–19 ноември 2017 г., гр. Варна
Тема за 11.–12. клас, пета състезателна група
Решения и указания

Задача 1. Тяло по наклонена равнина

Тяло с маса m се движи нагоре по наклонена равнина с ъгъл на наклона α (началното положение на тялото е показано на Фигура 1). Началната скорост на тялото е v_0, а коефициентът на триене между тялото и равнината (и наклонената, и хоризонталната ѝ част) е μ ($\mu < \tan\alpha$).



Фигура 1

За следващите четири подусловия разгледайте движението на тялото по наклонената равнина и определете:

1.1. ускорението a на тялото като големина и посока, при движението му нагоре и надолу; **(2 т.)**

1.2. координатата x на тялото като функция на времето, при движението му нагоре и надолу; **(2 т.)**

1.3. времето $t_и$, за което тялото ще достигне максимална височина; **(2 т.)**

1.4. максималната височина, h_{max}, на която се издига тялото спрямо началното си положение ($t = 0$). **(2 т.)**

Приемете, че преходът между наклонената равнина и хоризонталния участък на Фиг. 1 е плавен, т.е. когато тялото преминава през него, се променя само посоката на скоростта му, но не и големината ѝ.

1.5. На какво разстояние се намира тялото, спрямо началното си положение ($t = 0$), при окончателното му спиране? **(2 т.)**

Решение: 1.1. Да разгледаме координатна система с начало най-ниската точка от наклонената равнина. Положителната посока на оста Ox да е успоредна на наклонената равнина и насочена нагоре по нея. Определяме силите, който действат на тялото, и записваме втория закон на Нютон:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}.$$

Тук с f е означена силата на триене, за която е изпълнено $f = \mu N = \mu mg\cos\alpha$. Като запишем горното равенство по компоненти, **(1 т.)** може да определим ускорението на тялото:

$$a = -(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g,\ v > 0,\ t < t_и;\ \textbf{(0,5 т.)} \tag{1.1}$$

$$a = -(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g,\ v < 0,\ t > t_и.\ \textbf{(0,5 т.)} \tag{1.2}$$

1.2. В така избраната координатна система за закона за движение на тялото получаваме:

$$x(t) = v_0 t - (\sin\alpha + \mu\cos\alpha)gt^2/2,\ v > 0,\ t < t_и;\ \textbf{(1 т.)} \tag{1.3}$$

$$x(t) = x_{max} - (\sin\alpha - \mu\cos\alpha)g(t - t_{\text{и}})^2/2,\ v < 0,\ t > t_{\text{и}},\ \textbf{(1 т.)} \tag{1.4}$$

където x_{max} е максималното разстояние, което изминава тялото нагоре по наклонената равнина.

1.3. Времето, за което тялото ще измине това разстояние, се определя от закона за скоростта **(1 т.)** и е равно на:

$$t_{\text{и}} = \frac{v_0}{(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g}.\ \textbf{(1 т.)} \tag{1.5}$$

Така за x_{max} получаваме израза:

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g}.\ \textbf{(1 т.)}$$

1.4. Максималната височина, на която се издига тялото, е:

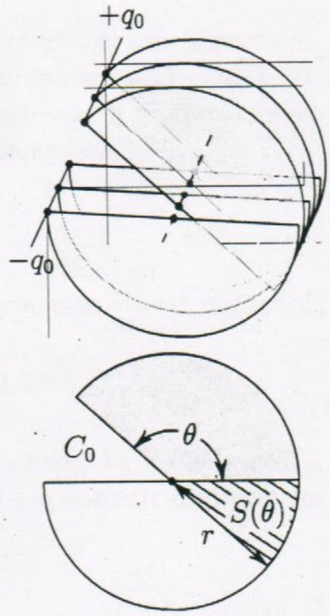
$$h_{max} = x_{max}\sin\alpha = \frac{v_0^2\sin\alpha}{2(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)g}.\ \textbf{(1 т.)} \tag{1.6}$$

1.5. За да определим разстоянието от началното положение, на което се намира тялото при окончателното му спиране, използваме закона за изменение на енергията $\Delta E = A_{\text{тр}}$, **(1,5 т.)** откъдето получаваме:

$$s = \frac{v_0^2}{2\mu g}\frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{\sin\alpha + \mu\cos\alpha}.\ \textbf{(0,5 т.)} \tag{1.7}$$

Задача 2. Кондензатор с променлив капацитет

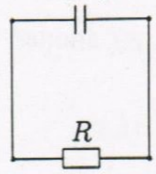
2.1. За промяна на честотата на трептящ кръг в радиотехниката са се използвали кондензатори с променлив капацитет. Промяната на капацитета на такъв кондензатор става, като се промени ефективната площ на плочите на кондензатора. На Фигура 2 е показан кондензатор с променлив капацитет, който се състои от $2N$ на брой еднакви тънки плочи с формата на полукръг с радиус r. Плочите са разделени на два реда, условно бели и сиви, като плочите във всеки ред са свързани с проводници (плътните линии на горната част от Фиг. 2). Разстоянието между две съседни плочи от един ред (например белите) е d. Сивите плочи са поставени точно по средата между белите плочи и могат да се въртят около ос, минаваща през центъра на всеки от полукръговете – пунктираната линия от Фиг. 2. Определете капацитета C на кондензатора като функция на ъгъла на завъртане θ. При $\theta = 0$ капацитетът $C(0) = C_0$ е максимален. **(3 т.)**



Фигура 2

2.2. Кондензатор с променлив капацитет е успоредно свързан с резистор със съпротивление R – Фигура 3. В началния момент кондензаторът е зареден до заряд q_0, а капацитетът му е C_0 (кондензаторът от предното подусловие).

2.2.1. С каква ъглова скорост ω трябва да въртим плочите му, така че токът във веригата да остава постоянен? **(4 т.)**
2.2.2. За колко време τ кондензаторът ще се разреди напълно? **(1,5 т.)**
2.2.3. Колко е отделеното количество топлина Q през резистора за това време? **(1,5 т.)**



Фигура 3

Решение: 2.1. Всеки две съседни плочи от различни редове на променливия кондензатор образуват плосък кондензатор с ефективна площ на плочите $S(\theta)$ и разстояние между тях $d/2$, така за капацитета на един от тези кондензатори може да запишем:

$$C_1(\theta) = \frac{\varepsilon_0 S(\theta)}{d/2} = \frac{\varepsilon_0(\pi-\theta)r^2}{d}, \ \mathbf{(1\,т.)}$$

където r е радиусът на плочите, а $(\pi - \theta)$ е ъгълът, под който те се припокриват. Като отчетем, че $2N$ плочи, свързани по указания начин, образуват $2N - 1$ успоредно свързани кондензатори с капацитет C_1, **(1 т.)** то капацитетът на променливия кондензатор, изразен като функция на ъгъла θ, ще бъде:

$$C(\theta) = (2N-1)\varepsilon_0(\pi-\theta)r^2/d. \ \mathbf{(1\,т.)} \tag{2.1}$$

2.2.1. Нека означим с C_0 максималния капацитет на кондензатора в началния момент време, отговарящ на $\theta = 0$. Горното равенство може да се презапише като:

$$C(\theta) = C_0\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right), \ \mathbf{(0{,}5\,т.)}$$

където $C_0 = (2N-1)\varepsilon_0\pi r^2/d$. Тъй като токът I във веригата остава постоянен, зарядът върху плочите на кондензатора ще се изменя по закона $q(t) = q_0 - It$. **(1 т.)** От друга страна падът на напрежението върху резистора и напрежението на плочите на кондензатора ще са равни. Така получаваме връзката:

$$IR = \frac{q(t)}{C(t)} = \frac{q_0 - It}{C(t)}. \ \mathbf{(1\,т.)}$$

От горното уравнение може да изразим зависимостта на капацитета от времето:

$$C(t) = \frac{q_0 - It}{IR} \equiv C(\theta) = C_0\left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right). \ \mathbf{(0{,}5\,т.)}$$

Ако положим $t = 0$, може да намерим големината на тока във веригата $I = q_0/RC_0$, **(0,5 т.)** откъдето за ъгловата скорост ω, с която трябва да въртим плочите на кондензатора, получаваме:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\pi}{RC_0}. \ \mathbf{(0{,}5\,т.)} \tag{2.2}$$

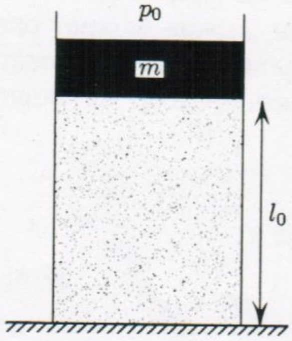
2.2.2. Времето, τ, за което се разрежда кондензаторът, се получава от условието $q(\tau) = 0$ **(1 т.)**:

$$\tau = \frac{q_0}{I} = RC_0. \ \mathbf{(0{,}5\,т.)} \tag{2.3}$$

2.2.3. Отделеното количество топлина през резистора получаваме от закона на Джаул–Ленц **(1 т.)**:

$$Q = I^2 R\tau = \frac{q_0^2}{C_0}. \ \mathbf{(0{,}5\ т.)} \tag{2.4}$$

Задача 3. Въздушна пружина



Фигура 4

Бутало с маса m може да се движи без триене в дълъг вертикален цилиндър, пълен с газ (Фигура 4). В равновесно положение буталото се намира на височина l_0 от дъното на цилиндъра, както е показано на фигурата.

3.1. Намерете налягането p_1 на газа, когато буталото се намира в равновесно положение. **(1,5 т.)**

3.2. Определете периода T и кръговата честота ω на малките трептения на буталото около равновесното му положение, ако площта на буталото е S, атмосферното налягане е p_0, а газът е идеален. Разгледайте два случая:

3.2.1. Движението на буталото става много бавно, при което газът не променя температурата си; **(4.5 т.)**

3.2.2. Движението на буталото става много бързо и газът не обменя топлина с околната среда. В този случай може да разгледате термодинамичен процес, който се описва от уравнението $pV^\gamma = \mathrm{const}$, където $\gamma = \mathrm{const}$. **(3.5 т.)**

3.3. Разгледайте горните два случая, като не отчитате влиянието на атмосферното налягане. **(0,5 т.)**

Полезна математика: $(1+x)^n \approx 1 + nx, \ |x| \ll 1$.

Полезна физика: кръговата честота е $\omega = 2\pi\nu$, където ν е честотата на трептенията.

Решение: 3.1. Налягането на газа, когато буталото е в равновесно положение, се определя от условието $mg + p_0 S = p_1 S$, **(1 т.)** откъдето за p_1 получаваме:

$$p_1 = \frac{mg + p_0 S}{S}. \ \mathbf{(0{,}5\ т.)} \tag{3.1}$$

3.2.1. Да разгледаме малко отклонение x на буталото от равновесното му положение, при което обемът на газа намалява с $\Delta V = xS$, а налягането му нараства с Δp. Вследствие на промяната на налягането на газа под буталото, на буталото ще действа допълнителна сила $F = \Delta p S$, насочена нагоре към равновесното му положение. Тъй като движението на буталото става много бавно, то температурата на газа не се променя. Тогава може да използваме, че:

$$pV = \mathrm{const}, \ \mathbf{(0{,}5\ т.)}$$

откъдето:

$$p_1 l_0 S = (p_1 + \Delta p)(l_0 S - xS). \ \mathbf{(0{,}5\ т.)}$$

Тогава може да получим изменението на налягането:

$$\Delta p = \frac{p_1 x}{l_0 - x} = \frac{(mg + p_0 S)x}{S(l_0 - x)} \approx \frac{(mg + p_0 S)x}{S l_0}, \ \mathbf{(1\ т.)}$$

където сме отчели, че $l_0 \gg x$, т.е. $l_0 - x \approx l_0$. Така за допълнителната сила, която действа на буталото, получаваме:

$$F = -\frac{mg + p_0 S}{l_0} x. \ \mathbf{(0{,}5\ т.)}$$

Знакът минус показва, че силата е насочена към равновесното положение и е в противоположна посока на отместването на буталото. Също така се вижда, че силата има вида $F = -kx$, т.е. коефициентът пред отместването x има смисъл на коефициент на квазиеластичност, **(0,5 т.)** тогава за периода на трептенията, $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, може да запишем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml_0}{mg + p_0 S}}, \ \mathbf{(0{,}5\ т.)} \tag{3.2}$$

а за кръговата честота , ω се получава:

$$\omega = \sqrt{\frac{mg + p_0 S}{ml_0}}. \ \mathbf{(1\ т.)} \tag{3.3}$$

3.2.2. При много бързо движение на буталото газът не може да обмени топлина с околната среда и процесът може да се разглежда като адиабатен. При адиабатен процес използваме, че:

$$pV^\gamma = \text{const},$$

което в конкретния случай се записва така:

$$p_1(l_0 S)^\gamma = (p_1 + \Delta p)(l_0 S - xS)^\gamma. \ \mathbf{(0{,}5\ т.)}$$

Аналогично на предния случай, за изменението на налягането може да получим:

$$\Delta p = \gamma \frac{x}{l_0} p_1, \ \mathbf{(1.5\ т.)}$$

където сме отчели, че $\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^\gamma \approx \left(1 - \gamma\frac{x}{l_0}\right)$, тъй като цилиндърът е много висок и $l_0 \gg x$. От тук се вижда, че налягането нараства γ пъти в сравнение с изотермния случай. Така периодът и кръговата честота ще се изменят с множител равен на $\gamma^{1/2}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml_0}{(mg + p_0 S)\gamma}} \ \mathbf{(0{,}5\ т.)} \text{ и } \omega = \sqrt{\frac{mg + p_0 S}{ml_0}\gamma}. \ \mathbf{(1\ т.)} \tag{3.4}$$

3.2.3. Заместваме $p_0 = 0$ в равенства (3.2) и (3.4) и получаваме периода на буталото без да отчитаме влиянието на атмосферното налягане:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}, \ T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{\gamma g}}. \ \mathbf{(0{,}5\ т.)} \tag{3.5}$$

Вижда се, че в този случай периодът на буталото съвпада с периода на математично махало с дължина l_0 и l_0/γ.