МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
25 - 27 ноември 2016 г., Велинград
Специална тема, Решения и указания

Задача 1. Планета с ядро.

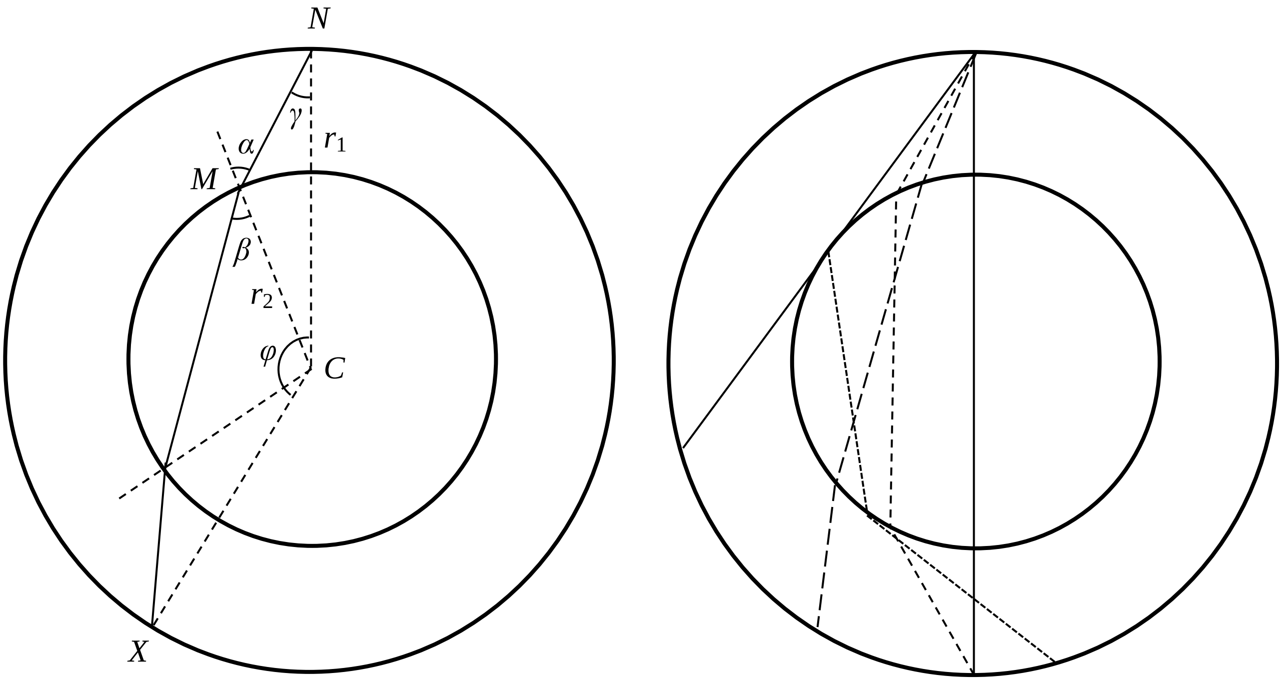
а) Силата на тежестта, която действа на тяло с маса m на повърхността на планетата, е гравитационната сила на привличане между тялото и планетата: $mg(r_1) = G\frac{M(r_1)m}{{r_1}^2}$, като масата на планетата е $M(r_1) = \frac{4\pi}{3}[\rho_2 {r_2}^3 + \rho_1({r_1}^3 - {r_2}^3)]$. След опростяване $\rho_2 = \frac{3g(r_1){r_1}^2}{4\pi G{r_2}^3} - \rho_1\left[\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^3 - 1\right]$ **[0,5 т.]** = 10,53 g/cm^3. **[0,5 т.]**

б) Силата на тежестта, която действа на тяло с маса m на разстояние r от центъра на планетата, зависи само от тази част от масата на планетата, оградена от сфера с радиус r : $mg(r) = G\frac{M(r)m}{r^2}$, където $M(r) = \frac{4\pi}{3}\rho_2 r^3$. Следователно $g(r) = G\frac{4\pi}{3}\rho_2 r$. **[0,5 т.]** $g(r_2) = 10{,}30$ m/s^2. **[0,5 т.]**

в) Ускорението $g(r)$ при $r \in (r_2, r_1)$ е $g(r) = G\frac{4\pi}{3r^2}[\rho_2 {r_2}^3 + \rho_1(r^3 - {r_2}^3)] =$ $G\frac{4\pi}{3r^2}[(\rho_2 - \rho_1){r_2}^3 + \rho_1 r^3]$. То има локален минимум, когато производната на тази функция е нула: $\frac{dg(r)}{dr} = G\frac{4\pi}{3}\left[(\rho_2 - \rho_1){r_2}^3\frac{(-2)}{r^3} + \rho_1\right] = 0$, откъдето $r_x = r_2\sqrt[3]{\frac{2(\rho_2 - \rho_1)}{\rho_1}} = r_2\sqrt[3]{2\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right)} \approx$ **[1 т.]** 4862 km. **[0,5 т.]** $g(r_x) = 9{,}17$ m/s^2 . **[0,5 т.]**

г) Промяната на налягането при промяна на радиуса се дава с формулата $\Delta p(r) = -\rho(r)g(r)\Delta r$. Следователно промяната на налягането ще се изразява с площта, заградена под графиката на $\rho(r)g(r) = f(r)$. Площта за $r \in (0, r_2)$ е площ на триъгълник, а за $r \in (r_2, r_1)$ – площ на правоъгълник. Тогава $p(0) = \frac{1}{2}\rho_2 g(r_2) r_2 + \rho_1 g(r_1)(r_1 - r_2)$ **[1 т.]** $\approx 3{,}1.10^{11}$ Pa = 3,1. 10^6 atm **[0,5 т.]**

д)

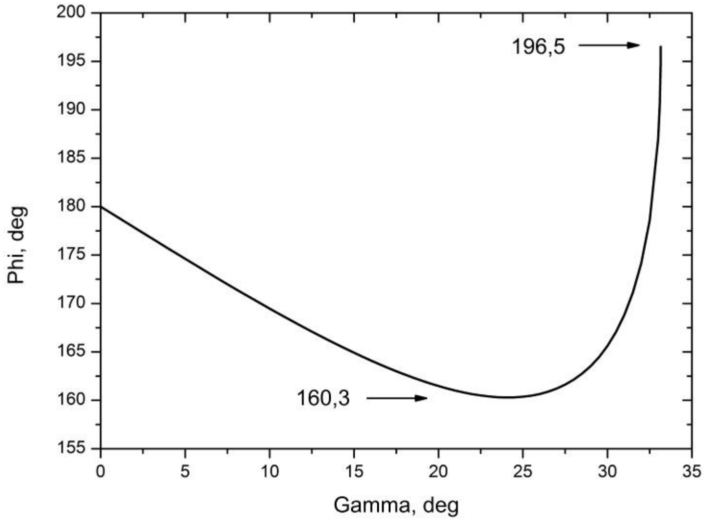


За да не преминава вълната през ядрото, ъгълът γ (виж чертежа) трябва да е по-голям от $\gamma_{\min}$, където $\sin\gamma_{\min} = \frac{r_2}{r_1}$. $\gamma_{\min} \approx 33{,}15°$. Тогава $\varphi_{\max} = 2(90° - \gamma_{\min}) \approx 113{,}7°$. Следователно интервалът от ъгли φ, съответстващи на точки X, които вълната достига, без да преминава през ядрото, е $\varphi \in (0, 113{,}7°)$. **[0,5 т.]**

е) От чертежа се вижда, че $\varphi = 180° - 2\beta + 2(\alpha - \gamma)$. Използвайки, че $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$ и прилагайки синусовата теорема за триъгълник *CMN* : $\frac{r_2}{\sin\gamma} = \frac{r_1}{\sin(180°-\alpha)} = \frac{r_1}{\sin\alpha}$, се получава $\varphi = 180° + 2\left[-\gamma + \sin^{-1}\left(\frac{r_1}{r_2}\sin\gamma\right) - \sin^{-1}\left(\frac{v_2}{v_1}\frac{r_1}{r_2}\sin\gamma\right)\right]$. **[2 т.]**

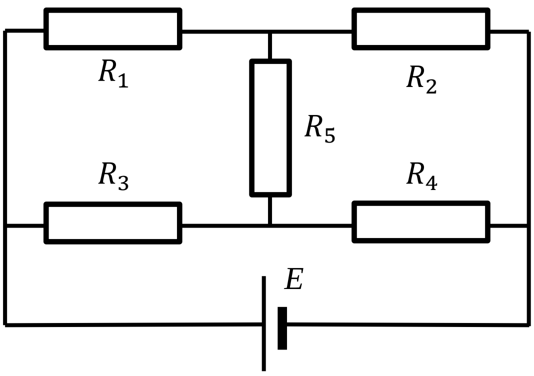
ж) Изследвайки функцията $\varphi = f(\gamma)$ в интервала ъгли $\gamma \in [0, \gamma_{\min}]$ може да получим следната таблица и следната графика:

γ, °	φ, °
0	180
5	174.611
10	169.4727
15	164.9124
20	161.4782
21	161.0097
22	160.643
23	160.3967
24	160.2942
25	160.3662
30	165.6254
31	168.8312
32	174.1618
33	186.9833
33.15	195.1057
33.1528	196.2656
33.1528879	196.509



От тези данни може да се направи извода (виж фигурата с типовете пътища на вълните през планетата), че за $\varphi \in (113{,}7°;\ 160{,}3°)$ не пристигат никакви вълни (това е мястото на сеизмична сянка), **[0,5 т.]** за $\varphi \in (160{,}3°;\ 163{,}5°)$ пристигат 2 вълни **[1 т.]**, а за $\varphi \in [163{,}5°;\ 180°]$ пристигат 3 вълни. **[0,5 т.]**

<u>Задача 2.</u> Небалансиран Уитстонов мост.



а) Нека токовете през съответните резистори R_1, R_2, R_3, R_4, R_5 са I_1, I_2, I_3, I_4, I_5. Тогава, когато $I_5 = 0$, $I_1 = I_2$ и $I_3 = I_4$. При нулев ток I_5, напрежението на резистора R_5 е също нула и тогава напреженията на двойките резистори $\{R_1\ ,\ R_3\}$ и $\{R_2\ ,\ R_4\}$ също са равни: $I_1.R_1 = I_3.R_3$; $I_2.R_2 = I_4.R_4$. Разделяйки почленно тези две уравнения и съкращавайки равните токове, се получава $R_1 = R_2\frac{R_3}{R_4}$. **[1,5 т.]** След заместване с дадените стойности, $R_1 = 15$ kΩ. **[0,5 т.]**

б) В общия случай във веригата има 5 неизвестни тока. Написвайки 5 независими уравнения, можем да намерим тока I_5. Тези уравнения могат да бъдат различни. Една възможна комбинация е следната (при избрана посока на тока I_5 надолу): $I_1 = I_2 + I_5$; $I_3 + I_5 = I_4$; $E = R_3.I_3 + R_4.I_4$; $R_1.I_1 + R_5.I_5 = R_3.I_3$; $R_2.I_2 = R_5.I_5 + R_4.I_4$. **[1 т.]** Изразявайки I_1 от първото уравнение и I_4 от второто уравнение и замествайки в останалите, получаваме три нови уравнения: $E = (R_3 + R_4)I_3 + R_4 I_5$; $R_1 I_2 - R_3 I_3 + (R_1 + R_5)I_5 = 0$; $R_2 I_2 - R_4 I_3 - (R_4 + R_5)I_5 = 0$. Умножавайки второто уравнение по R_2 и третото по R_1 и изваждайки ги едно от друго, се получава $I_3 = I_5 \frac{R_1R_2+R_2R_5+R_1R_4+R_1R_5}{R_2R_3-R_1R_4}$. Замествайки в първото уравнение от трите новополучени, окончателно се получава $I_5 = E\frac{R_2R_3-R_1R_4}{R_5(R_1R_3+R_1R_4+R_2R_3+R_2R_4)+R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)} = E\frac{R_2R_3-R_1R_4}{R_5(R_1+R_2)(R_3+R_4)+R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)}$. **[4 т.]**

в) В случая, когато $R_5 \ll R_1, R_2, R_3, R_4$, първото събираемо в знаменателя на по-горния израз за I_5 е пренебрежимо малко и тогава формулата се опростява до $I_5 = E\frac{R_2R_3-R_1R_4}{R_1R_2(R_3+R_4)+R_3R_4(R_1+R_2)}$. **[1 т.]**

г) Замествайки в по-горната формула $R_2 = R_3 = R_4 = R$, а $R_1 = R \pm \Delta R_1$, се получава $I_5 \approx \mp E\frac{\Delta R_1}{4R^2}$. Следователно $\Delta R_1 \leq \frac{4R^2 I_5}{E}$ **[1,5 т.]** $= 40\ \Omega$. **[0,5 т.]**

<u>Задача 3.</u> Изстиващ балон.

а) Тъй като $p.r = a$, а $r = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$, то $p.V^{1/3} = a\left(\frac{4\pi}{3}\right)^{1/3} = const.$ Следователно $n = 1/3$. **[1 т.]**

б) От първия принцип на термодинамиката следва, че $\Delta Q = \Delta U + \Delta A$, (3.1) където $\Delta Q = C_{all}\Delta T$, $\Delta U = sC_V\Delta T$ и $\Delta A = p\Delta V$. **[0,5 т.]** Тогава (3.1) се преобразува до $C_{all}\Delta T = sC_V\Delta T + p\Delta V$. (3.2) **[0,5 т.]** От уравнението на процеса $p.V^n = const.$, за малки изменения на обема и налягането се получава $pV^n = (p + \Delta p)(V + \Delta V)^n \approx (p + \Delta p)(V^n + nV^{n-1}\Delta V) \approx pV^n + \Delta pV^n + npV^{n-1}\Delta V$. След съкращения $\Delta pV + np\Delta V = 0$. (3.3) **[0,5 т.]** От друга страна от уравнението на идеалния газ за две близки състояния следва: $pV = sRT$ (3.4), $(p + \Delta p)(V + \Delta V) = sR(T + \Delta T)$ (3.5). Изваждайки (3.4) от (3.5), $\Delta pV + p\Delta V + \Delta p\Delta V = sR\Delta T \approx \Delta pV + p\Delta V$. (3.6) **[0,5 т.]** Комбинирайки (3.6) и (3.3), се получава $p\Delta V = \frac{sR\Delta T}{1-n}$ (3.7). **[0,5 т.]** Замествайки (3.7) в (3.2) и използвайки резултата за *n* от подусловие а), $C_{all} = sC_V + \frac{sR}{1-n} = 3sR$. **[1 т.]**

в) При излъчване като абсолютно черно тяло, балонът ще излъчва топлина, зависеща от температурата и площта му според закона на Стефан-Болцман така: $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -C_{all}\frac{\Delta T}{\Delta t} = \sigma ST^4$. **[0,5 т.]** (3.8) Тъй като площта на балона е $S = 4\pi r^2$, уравнението на идеалния газ може да се преобразува така: $pV = sRT$, $\frac{a}{r}\frac{4}{3}\pi r^3 = sRT$, $4\pi r^2 = \frac{3}{a}sRT$. (3.9) Замествайки (3.9) в (3.8), се получава $\frac{\Delta T}{\Delta t} = -\frac{3\sigma sR}{aC_{all}}T^5 = -\frac{\sigma}{a}T^5 = BT^5$ **[1 т.]** $(B \equiv -\frac{\sigma}{a})$. (3.10) Функцията $T(t)$, удовлетворяваща (3.10), е от типа $T(t) = [-4(Bt + C)]^{-1/4}$. **[0,5 т.]** (3.11) Неизвестната константа C може да се определи от началните условия, $(0) = T_0 = [-4C]^{-1/4}$, откъдето $C = -\frac{1}{4T_0{}^4}$. **[0,5 т.]** Замествайки в (3.11), $T(t) = \frac{T_0}{\sqrt[4]{\frac{4\sigma T_0{}^4}{a}t+1}}$. **[1 т.]** (3.12)

г) Тъй като $T(t_{1/2}) = \frac{T_0}{2}$, от (3.12) следва, че $\frac{4\sigma T_0{}^4}{a}t_{1/2} = 15$. **[0,5 т.]** (3.13) Използвайки резултатите от подусловие а), $a = p_0 V_0{}^{1/3}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}$. Замествайки в (3.13), $t_{1/2} = \frac{15}{4}\frac{p_0 V_0{}^{1/3}}{\sigma T_0{}^4}\left(\frac{3}{4\pi}\right)^{1/3}$ **[1 т.]** $= 507$ s. **[0,5 т.]**