МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
25 - 27 ноември 2016 г., Велинград
Специална тема

Задача 1. Планета с ядро.

Хипотетична планета е съставена от ядро с неизвестна плътност ρ_2 и радиус $r_2 =$ 3500 km и външен слой („мантия“) с плътност $\rho_1 = 4{,}50$ g/cm^3. Радиусът на планетата е $r_1 = 6400$ km. Ускорението на свободно падане на повърхността й е $g(r_1) = 9{,}81$ m/s^2.

а) Изчислете плътността ρ_2 на ядрото й. **[1 т.]**

б) Получете формула за ускорението $g(r)$ на свободно падане за разстояния от центъра на планетата $r \leq r_2$. **[0,5 т.]** Колко е стойността на ускорението $g(r_2)$? **[0,5 т.]**

в) Оказва се, че при някакво разстояние $r_x \in (r_2, r_1)$, ускорението $g(r)$ има локален минимум. Изчислете r_x и $g(r_x)$. **[2 т.]**

г) Изчислете приближено налягането $p(0)$ в центъра на планетата (в единици atm). За целта приемете, че ядрото и мантията могат да се разглеждат като флуиди, налягането на атмосферата на планетата е пренебрежимо малко ($p(r_1) \approx 0$) и ускорението на свободно падане в мантията е постоянно, $g(r) = 10$ m/s^2 за $r \in (r_2, r_1)$. **[1,5 т.]**

Механична вълна, когато преминава през границата между две среди, се пречупва. Законът за пречупването е същият като законът на Снелиус за светлината: $\frac{\sin\alpha_1}{\sin\alpha_2} = \frac{v_1}{v_2}$, където α_1 и v_1 са ъгълът на падане и скоростта на разпространение на вълната в първата среда, а α_2 и v_2 са ъгълът на пречупване и скоростта на разпространение на вълната във втората среда. За простота по-нататък ще се разглеждат само един тип механични (сеизмични) вълни – надлъжни. Наличието на всякакви отразени вълни се пренебрегва. Скоростта на разпространение на сеизмичната вълна в мантията е $v_1 = 12$ km/s, а в ядрото – $v_2 = 9$ km/s. Нека т. N е северният полюс на планетата и е епицентър на планетотресение (център на сеизмичен взрив), а т. C – центърът на планетата. Нека т. X е точка от повърхността на планетата, която сеизмичната вълна достига, тръгвайки от N и преминавайки през вътрешността на планетата. Ъгълът NCX бележим с φ, а ъгълът между NC и посоката на разпространение на вълната, тръгнала от N – с γ.

д) Намерете интервала от ъгли φ, съответстващи на точки X, които вълната достига, без да преминава през ядрото. **[0,5 т.]**

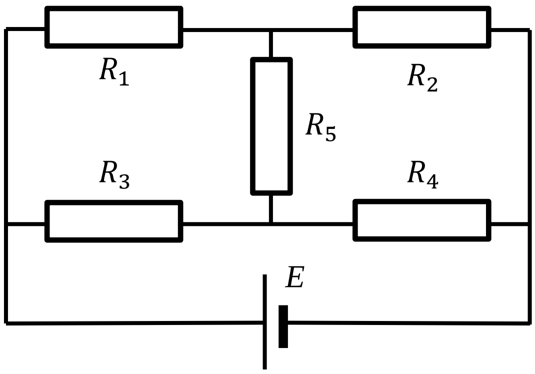
е) Получете зависимостта $\varphi = f(\gamma)$ за вълни, преминали през ядрото. **[2 т.]**

ж) Изследвайки числено функцията $\varphi = f(\gamma)$, получете интервала от ъгли φ за точки X, където не пристигат никакви вълни (мястото на сеизмична сянка) **[0,5 т.]**, интервала от ъгли φ, където пристигат 2 вълни **[1 т.]** и интервала от ъгли φ, където пристигат 3 вълни. **[0,5 т.]** Ъглите φ представете в градуси и ги изчислете с точност 0,1°.

Задача 2. Небалансиран Уитстонов мост.

Електрическа схема, съдържаща батерия с електродвижещо напрежение E и 5 резистора, свързани по начина, показан на фигурата, се нарича Уитстонов мост. Резисторът R_5 всъщност е вътрешното съпротивление на амперметър. Когато амперметърът измерва нулев ток, мостът се нарича балансиран. Обикновено три от резиторите са известни (например R_2, R_3 и R_4, като един или повече могат да се променят/регулират, за да се балансира мостът) и се търси стойността на четвъртия (R_1).

а) Намерете формула и изчислете стойността на R_1 в случая на балансиран мост (токът през R_5 е нула), ако са известни останалите параметри на веригата: E = 10 V, R_2 = 12 kΩ, R_3 = 10 kΩ, R_4 = 8 kΩ, R_5 = 10 Ω. **[2 т.]**



б) Намерете формула за тока I_5 през резистора R_5 при произволни стойности на параметрите на веригата. **[5 т.]**

в) Намерете приближена формула за тока I_5 през резистора R_5 в случая, когато $R_5 \ll R_1, R_2, R_3, R_4$ **[1 т.]**

г) Уитстонов мост се използва за качествен контрол при производство на резистори с номинална стойност 10 kΩ. Мостът се балансира с еталонни (известни с голяма точност) и равни по стойност резистори, $R_2 = R_3 = R_4 =$ 10 kΩ. Проверяваният резистор е R_1. Според показанията на амперметъра (с пренебрежимо съпротивление) мостът е балансиран, но всъщност амперметърът показва нулев ток, когато стойността на тока през него е $I_5 \leq 1\mu$A. Електродвижещото напрежение E = 10 V. С каква абсолютна грешка ΔR_1 се измерва резисторът R_1? **[2 т.]**

<u>Задача 3.</u> Изстиващ балон.

s мола идеален газ се намират в сферичен балон. Балонът се намира във вакуум с нулева температура и притежава такива еластични свойства, че радисът му r и налягането p на газа в него са свързани с равенството $p = \frac{a}{r}$, където a е някаква константа. Зависимостта на налягането p в балона от обема му V се описва от закона $p.V^n = const$.

а) Изчислете числото n. **[1 т.]**

б) Ако моларният капацитет при постоянен обем на газа е $C_V = \frac{3}{2}R$, където R е универсалната газова константа, пресметнете топлинния капацитет C_{all} на целия газ в балона при условията, при които е поставен. **[3,5 т.]**

в) Ако първоначалната температура на газа е T_0 , намерете как температурата $T(t)$ на балона се изменя с времето (изразена чрез σ, a, T_0 и t). Приемете, че балонът има пренебрежим топлинен капацитет и излъчва като абсолютно черно тяло. **[3,5 т.]**

г) Нека първоначалната температура на газа е T_0 = 300 K, налягането му е p_0 = 1 atm, а обемът му е V_0 = 1 m^3. След колко време $t_{1/2}$ температурата му ще спадне наполовина? Намерете формула **[1,5 т.]** за $t_{1/2}$ (изразено чрез T_0, p_0, V_0 и σ) и изчислете стойността му. **[0,5 т.]**

Полезна математика и фундаментални константи:

Гравитационна константа G = 6,67.10^{-11} N.m^2/kg^2

1 atm = 10^5 Pa

Синусова теорема: В триъгълник със страни a, b, c и ъгли срещу тези страни α, β, γ са изпълнени равенствата $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

Константа на Стефан-Болцман σ = 5,67.10^{-8} W.m^{-2}.K^{-4}

Ако една функция $T(t)$ е свързана с производната си така: $\frac{dT(t)}{dt} = B.[T(t)]^k$, където B – е константа, а k – число ($k \neq 1$), то функцията има вида $T(t) = [(-k+1)(Bt+D)]^{\frac{1}{-k+1}}$, където D е неизвестна константа.