

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
14 - 15 ноември 2015 г., Велико Търново
Специална тема, Решения и указания

Задача 1. Монте Карло симулация на Брауново движение.

а) Възможен вариант: показание на зарчето – посока на движение; 1 – нагоре, 2 – надясно, 3 – надолу, 4 – наляво, при 5 и 6 се хвърля наново. [1 т.]

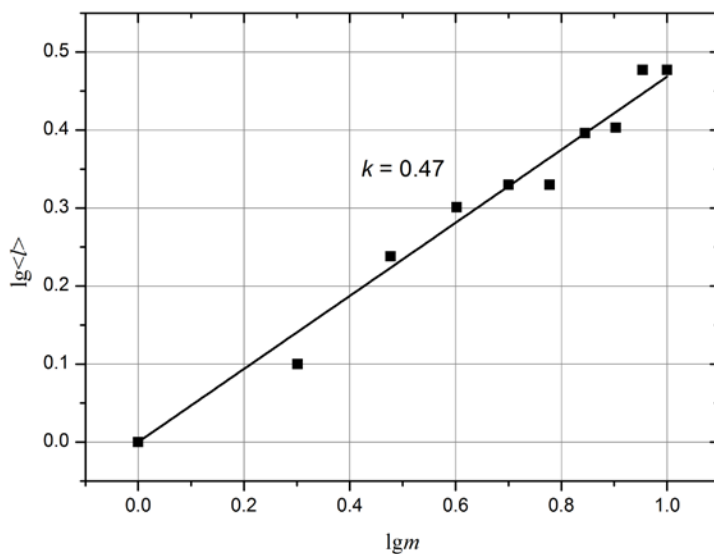
б) Примерни данни са дадени в таблицата. [3 т.]

в) Зависимостта на $\sqrt{l_m^2}$ от броя стъпки m също е дадена в таблицата. [1 т.]

г) Ако зависимостта $\sqrt{l_m^2} = f(m)$ е от типа $\sqrt{l_m^2} = c \cdot m^k$, начертавайки графиката ѝ в двойно-логаритмичен мащаб $\lg(\sqrt{l_m^2}) = \lg(c) + k \cdot \lg(m)$, тя ще е линейна функция с наклон k и свободен член $\lg(c)$. Представените данни са начертани на фигурата. [3 т.]

д) От графиката за неизвестната степен се изчислява $k = 0,47$. За Брауновото движение теорията предсказва $k = 0,5$. [1.5 т.]

е) От графиката $\lg(c) = 0$, следователно константата $c = 1$. [0.5 т.]



N_{1i}	x_{i,y_i}	l_{1i}^2	N_{2i}	x_{i,y_i}	l_{2i}^2	N_{3i}	x_{i,y_i}	l_{3i}^2	N_{4i}	x_{i,y_i}	l_{4i}^2	N_{5i}	x_{i,y_i}	l_{5i}^2	m	$\sqrt{l_m^2}$
1	1,0	1	1	0,0	0	1	0,-1	1	1	0,0	0	1	1,0	1	1	1.00
2	-1,0	1	2	0,0	0	2	-1,0	1	2	0,0	0	2	-1,0	1	2	1.26
3	1,0	1	3	1,1	2	3	2,1	5	3	2,2	8	3	2,3	13	3	1.73
4	0,-1	1	4	0,0	0	4	0,-1	1	4	-1,-1	2	4	-1,0	1	4	2.00
5	-1,0	1	5	-2,0	4	5	-2,1	5	5	-2,0	4	5	-2,-1	5	5	2.14
6	0,-1	1	6	-1,-1	2	6	-2,-1	5	6	-2,-2	8	6	-3,-2	13	6	2.14
7	-1,0	1	7	0,0	0	7	1,0	1	7	0,0	0	7	0,1	1	7	2.49
8	-1,0	1	8	-1,-1	2	8	-1,0	1	8	-2,0	4	8	-1,0	1	8	2.53
9	0,1	1	9	0,2	4	9	-1,2	5	9	-1,3	10	9	0,3	9	9	3.00
10	0,1	1	10	-1,1	2	10	-1,2	5	10	0,2	4	10	0,1	1	10	3.00
	$\overline{l_1^2} = 1,0$			$\overline{l_2^2} = 1,6$			$\overline{l_3^2} = 3,0$			$\overline{l_4^2} = 4,0$			$\overline{l_5^2} = 4,6$			
N_{6i}	x_{i,y_i}	l_{6i}^2	N_{7i}	x_{i,y_i}	l_{7i}^2	N_{8i}	x_{i,y_i}	l_{8i}^2	N_{9i}	x_{i,y_i}	l_{9i}^2	N_{10i}	x_{i,y_i}	l_{10i}^2	lgm	$lg\sqrt{l_m^2}$
1	1,-1	2	1	0,-1	1	1	1,-1	2	1	1,0	1	1	2,0	4	0.000	0.000
2	-1,1	2	2	-1,0	1	2	0,0	0	2	0,1	1	2	0,0	0	0.301	0.100
3	1,3	10	3	1,4	17	3	1,5	26	3	1,6	37	3	1,7	50	0.477	0.238
4	0,0	0	4	1,0	1	4	2,0	4	4	2,1	5	4	1,1	2	0.602	0.301
5	-1,-1	2	5	-1,0	1	5	-1,-1	2	5	-2,-1	5	5	-1,-1	2	0.700	0.330
6	-3,1	10	6	-4,1	17	6	-3,-1	10	6	-3,-2	13	6	-3,-1	10	0.778	0.330
7	-1,1	2	7	-1,0	1	7	-1,1	2	7	0,1	1	7	0,0	0	0.845	0.396
8	0,0	0	8	1,0	1	8	0,0	0	8	1,0	1	8	1,-1	2	0.903	0.403
9	0,4	16	9	1,4	17	9	0,4	16	9	-1,4	17	9	-1,3	10	0.954	0.477
10	1,1	2	10	2,1	5	10	2,0	4	10	3,0	9	10	3,-1	10	1.000	0.477
	$\overline{l_6^2} = 4,6$			$\overline{l_7^2} = 6,2$			$\overline{l_8^2} = 6,4$			$\overline{l_9^2} = 9,0$			$\overline{l_{10}^2} = 9,0$			

Задача 2. Пренос на топлина през прозорец.

а) Уравнението за топлопроводността дава, че $P_1 = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \chi_{gl} \frac{T_{in}-T_{out}}{d} S = [0.5 \text{ т.}]$
 $0,96 \frac{\text{W}}{\text{mK}} \frac{20 \text{ degC} - 0 \text{ degC}}{4 \cdot 10^{-3} \text{ m}} 2 \text{ m}^2 = 9600 \text{ W} [0.5 \text{ т.}]$

б) Тъй като температурата на дадено място не се променя, то количеството топлина, преминало през всяка равнина, успоредна на стъклата на прозореца, ще е една и съща. Нека температурата на външната страна на вътрешното стъкло е T_1 , а температурата на вътрешната страна на външното стъкло е T_2 . Тогава

$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \chi_{gl} \frac{T_{in}-T_1}{d} \cdot S$, $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \chi_{air} \frac{T_1-T_2}{l} \cdot S$, $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \chi_{gl} \frac{T_{out}-T_2}{d} \cdot S$. [1 т.] Тези три равенства могат да се запишат и така: $\frac{\Delta Q d}{\Delta t \chi_{gl} S} = T_{in} - T_1$, $\frac{\Delta Q l}{\Delta t \chi_{air} S} = T_1 - T_2$, $\frac{\Delta Q d}{\Delta t \chi_{gl} S} = T_2 - T_{out}$. Събирайки ги

почленно, се получава $\frac{\Delta Q}{\Delta t S} \left(\frac{d}{\chi_{gl}} + \frac{l}{\chi_{air}} + \frac{d}{\chi_{gl}} \right) = T_{in} - T_{out}$, откъдето $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{T_{in} - T_{out}}{\frac{2d}{\chi_{gl}} + \frac{l}{\chi_{air}}} S = [1 \text{ т.}]$

$$\frac{20 \text{ K} \cdot 2 \text{ m}^2}{\frac{2.4 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0.96 \frac{\text{W}}{\text{mK}}} + \frac{16 \cdot 10^{-3} \text{ m}}{0.024 \frac{\text{W}}{\text{mK}}}} \approx 59 \text{ W}. [1 \text{ т.}]$$

в) Температурата на външната страна на вътрешното стъкло е $T_1 = T_{in} - \frac{\Delta Q}{\Delta t S} \frac{d}{\chi_{gl}} \approx 19,88 \text{ }^\circ\text{C}$. [0.5 т.] Температурата на вътрешната страна на външното стъкло е $T_2 = T_{out} + \frac{\Delta Q}{\Delta t S} \frac{d}{\chi_{gl}} \approx 0,12 \text{ }^\circ\text{C}$. [0.5 т.]

г) Съответно размерността на коефициента на топлопроводност χ е $[\chi] = \frac{\text{W}}{\text{m} \cdot \text{K}} = \frac{\text{kgm}}{\text{s}^3 \text{K}}$, [0.25 т.] на специфичния топлинен капацитет на газа при постоянен обем $[c_V] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}} = \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2 \cdot \text{K}}$, [0.25 т.] на плътността му е $[\rho] = \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, на средната скорост на молекулите му е $[\bar{v}] = \frac{\text{m}}{\text{s}}$, и на средната им дължина на свободен пробег е $[\lambda] = \text{m}$. Следователно $\text{kg}^1 \text{m}^1 \text{s}^{-3} \text{K}^{-1} = \text{m}^{2\alpha} \text{s}^{-2\alpha} \text{K}^{-\alpha} \cdot \text{kg}^\beta \text{m}^{-3\beta} \cdot \text{m}^\gamma \text{s}^{-\gamma} \cdot \text{m}^\delta$. [0.25 т.] Така получаваме, че $1 = \beta$, $1 = 2\alpha - 3\beta + \gamma + \delta$, $-3 = -2\alpha - \gamma$, $-1 = -\alpha$. [0.25 т.] Тези уравнения имат единствено решение $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$. [1 т.] Така $\chi = \text{const} \cdot c_V \cdot \rho \cdot \bar{v} \cdot \lambda$.

д) Нека изразим коефициента на топлопроводност на идеален газ чрез дадените величини. Специфичният топлинен капацитет c_V на газа зависи от моларния капацитет C_V така: $c_V = \frac{C_V}{\mu} = \frac{iR}{2\mu}$, [0.5 т.] където $i = 3$ (степени на свобода на едноатомен газ), а R е универсалната газова константа. Плътността на газа е $\rho = \frac{p\mu}{RT}$, [0.5 т.] където p е налягането, а T – температурата. Средната скорост на атомите е $\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. [0.5 т.]

Средната дължина на свободен пробег е от порядъка на $\frac{1}{nS}$, [0.5 т.] където n е атомната концентрация на газа, а S – сечението на молекулите. Следователно $\lambda \approx \frac{1}{nS} = \frac{RT}{pN_A \pi d^2} \cdot \frac{4}{\pi d^2}$, където N_A е числото на Авогадро, а d е диаметърът на атомите. Комбинирайки горните формули получаваме, че $\chi = \text{const} \cdot \frac{iR}{2\mu} \cdot \frac{p\mu}{RT} \cdot \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} \cdot \frac{RT}{pN_A \pi d^2} \cdot \frac{4}{\pi d^2} \propto \sqrt{\frac{T}{\mu}} \cdot \frac{1}{d^2}$. [0.25 т.] При една и съща температура $\frac{\chi_{Ar}}{\chi_{Kr}} = \sqrt{\frac{\mu_{Kr}}{\mu_{Ar}}} \left(\frac{d_{Kr}}{d_{Ar}} \right)^2$, откъдето $\chi_{Kr} = \chi_{Ar} \sqrt{\frac{\mu_{Ar}}{\mu_{Kr}}} \left(\frac{d_{Ar}}{d_{Kr}} \right)^2 \approx 10,5 \cdot 10^{-3} \text{ W/m} \cdot \text{K}$ (експериментално измерената стойност е $9,43 \cdot 10^{-3} \text{ W/m} \cdot \text{K}$). [0.25 т.] Сравнявайки коефициентите на топлопроводност на въздуха, аргона и криптона, заключаваме, че преносът на топлина през стъклопакета ще бъде най-голям при стъклопакет, пълен с въздух, с около една трета по-малък при стъклопакет, пълен с аргон и повече от два пъти по-малък при стъклопакет пълен с криптон. [0.5 т.]

Задача 3. Стояща електромагнитна вълна и микровълнова печка.

А. Стояща електромагнитна вълна

а) Тъй като векторите на посоката на разпространение, на интензитета $\vec{E}$ на електричното поле и на индукцията $\vec{B}$ на магнитното поле образуват дясна тройка и последните два вектора трептят във фаза, то магнитната индукция $\vec{B}_1$ на падащата вълна е $\vec{B}_1 = (0, B_{1y}, 0)$, $B_{1y} = -B_{10} \cos(kz + \omega t + \varphi) = -\frac{E_{10}}{c} \cos(kz + \omega t + \varphi)$. [0.5 т.]

Подусловията б), в), г) и д) ще се решат заедно. Тъй като тангенциалната компонента на вектора на интензитета на електричното поле на границата вакуум-метал трябва да е нула, то отразената вълна е също линейно-поляризирана със същата

ориентация и амплитуда на вектора на интензитета на електричното поле, но с неизвестна фаза ψ , $\vec{E}_2 = (E_{2x}, 0, 0)$, $E_{2x} = E_{10} \cos(kz - \omega t + \psi)$. Векторът на магнитната индукция $\vec{B}_2$ на отразената вълна ще бъде $\vec{B}_2 = (0, B_{2y}, 0)$, $B_{2y} = B_{20} \cos(kz - \omega t + \psi) = \frac{E_{10}}{c} \cos(kz - \omega t + \psi)$. Векторът на интензитета на електричното поле $\vec{E}_3$ на стоящата вълна е $\vec{E}_3 = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = (E_{3x}, 0, 0)$, $E_{3x} = E_{1x} + E_{2x} = E_{10} \cos(kz + \omega t + \varphi) + E_{10} \cos(kz - \omega t + \psi) = 2E_{10} \cos\left(kz + \frac{\varphi + \psi}{2}\right) \cdot \cos\left(\omega t + \frac{\varphi - \psi}{2}\right)$. Векторът на индукцията на магнитното поле $\vec{B}_3$ на стоящата вълна е $\vec{B}_3 = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = (0, B_{3y}, 0)$, $B_{3y} = B_{1y} + B_{2y} = -\frac{E_{10}}{c} \cos(kz + \omega t + \varphi) + \frac{E_{10}}{c} \cos(kz - \omega t + \psi) = -2\frac{E_{10}}{c} \sin\left(kz + \frac{\varphi + \psi}{2}\right) \sin\left(-\left(\omega t + \frac{\varphi - \psi}{2}\right)\right) = 2\frac{E_{10}}{c} \sin\left(kz + \frac{\varphi + \psi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \frac{\varphi - \psi}{2}\right)$. От граничните условия на границата вакуум-метал следва, че $E_{3x}(z=0) \equiv 0$, следователно $\frac{\varphi + \psi}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, откъдето $\psi = (2n+1)\pi - \varphi$ (n – цяло число). Вече знаейки фазата ψ , окончателно можем да определим вида на всички вектори:

$$E_{2x} = E_{10} \cos(kz - \omega t + (2n+1)\pi - \varphi) = -E_{10} \cos(kz - \omega t - \varphi), \text{ [0.5 т.]}$$

$$B_{2y} = \frac{E_{10}}{c} \cos(kz - \omega t + \varphi - (2n+1)\pi) = -\frac{E_{10}}{c} \cos(kz - \omega t - \varphi), \text{ [0.5 т.]}$$

$$E_{3x} = 2E_{10} \cos\left(kz + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \cos\left(\omega t + \varphi - \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = -2E_{10} \sin(kz) \sin(\omega t + \varphi), \text{ [1 т.]}$$

$$B_{3y} = 2\frac{E_{10}}{c} \sin\left(kz + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) \sin\left(\omega t + \varphi - \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = -2\frac{E_{10}}{c} \cos(kz) \cos(\omega t + \varphi). \text{ [1 т.]}$$

е) Възлите на стоящата вълна на електричното поле се намират в точки с координати $z = 0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, \dots, n\frac{\lambda}{2}, \dots$ (n – цяло число). Възлите на стоящата вълна на магнитното поле се намират в точки с координати $z = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, \dots, (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \dots$ (n – цяло число). [0.5 т.]

ж) Когато стойността на електричното поле във върховете на неговата стояща вълна е максимална, стойността на магнитното поле във върховете на неговата стояща вълна в момента време е нула [0.5 т.]

з) Когато стойността на електричното поле във върховете на неговата стояща вълна е нула, стойността на магнитното поле във върховете на неговата стояща вълна в момента време е $2\frac{E_{10}}{c}$ [0.5 т.]

Б) Микровълнова печка.

а) Модът с минимална честота е (1,1,0) [0.5 т.] Честотата му е 0,7315 GHz. [0.5 т.] Електричното му поле има вектор от типа $\vec{E} = (0, 0, E_z)$, E_z не зависи от z и има максимум в средата на пещта. [0.5 т.]

б) Проверявайки с различни цели числа, получаваме следните модове (някои от тях са „изродени“, т.е. със съвпадащи честоти, виж таблицата). [2 т.] Най-близка честота до тази на магнетрона имат модовете (2,4,1) и (4,2,1), която е 2,4442 GHz. [0.5 т.]

Тип						ν , GHz
m	n	l	m	n	l	
1	0	3	0	1	3	2,4242
2	3	2	3	2	2	2,4436
2	4	1	4	2	1	2,4442
1	1	3				2,4788

в) За модовете (2,4,1) и (4,2,1) ако електричното поле е само с вертикална компонента, то е максимално при $z = 0$ и $z = h$. Следователно пицата трябва да се постави максимално ниско или максимално високо в пещта. [0.5 т.] Тъй като $E_z\left(z = \frac{h}{2}\right) = 0$, то пицата ще се стопли най-бавно, ако се постави на височина по средата на пещта. [0.5 т.]